VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS

Autor(en): **Heuzé, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-44583

VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS

par G. Heuzé

0. Introduction

Les plans équilibrés (on dit aussi plans en blocs incomplets équilibrés) sont apparus sous leur forme actuelle vers 1939. Mais depuis longtemps on s'intéressait à certains problèmes d'algèbre combinatoire qui sont des cas particuliers de plans équilibrés (par exemple les plans affines et projectifs finis). Le présent papier se propose de présenter la théorie en énonçant les principaux résultats.

Après le paragraphe 1 consacré aux généralités (définitions, exemples classiques et résultats fondamentaux) le paragraphe 2 fait le point sur la question de l'existence des plans équilibrés, question qui n'est encore que très partiellement résolue.

Le paragraphe 3 enfin donne les quelques résultats actuellement connus concernant le nombre de plans équilibrés ayant des paramètres donnés. Il s'agit là d'un problème qu'on commence tout juste à aborder...

Certains ouvrages récents développent largement cette théorie: [1], [3] et surtout [2] dans lequel on trouvera les démonstrations des résultats énoncés sans référence bibliographique. Par ailleurs [1] donne une bibliographie très complète concernant les articles antérieurs à 1968.

1. Généralités

1.1. *Définition.* — Un *plan équilibré* (nous dirons le plus souvent plan) sur un ensemble fini E ($|E|=v$) est constitué d'une famille (B_j) $(j=1, \ldots, b)$ de parties de E (appelées *blocs*) telles que

(A 1) pour tout $j = 1, \ldots, b$, $|B_j|$ est constant $(=k)$,

(A'2) pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de E, le nombre de blocs contenant x et y est constant $(=\lambda)$,

$1 \leqq \lambda$ et $k \leqq v - 2$.

1.2. Nous en déduisons immédiatement la proposition:

(A'1) *pour tout $x \in E$ le nombre de blocs contenant x est constant* $(=r)$.

En effet, désignons par r_x le nombre de blocs contenant x et dénombrons de deux façons différentes les couples (y, B) vérifiant $x \in B$ et $y \in B$. On obtient $r_x(k-1) = (v-1)\lambda$, d'où le résultat.

1.3. *Les paramètres* v, b, r, k, λ *d'un plan équilibré* (nous noterons désormais $[v, b, r, k, \lambda]$ un tel plan) *vérifient*

$$\begin{cases} b\,k = r\,v \\ \lambda(v-1) = r(k-1) \end{cases}$$

Nous venons de montrer la deuxième égalité. La première s'obtient en dénombrant de deux façons différentes les couples (x, B) vérifiant $x \in B$.

1.4. Exemples:

— Sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on définit un $[7, 7, 3, 3, 1]$ en prenant pour blocs: $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$

— Sur $E = P_n(F_q)$ (resp. $(F_q)^n$), espace projectif (resp. affine) de dimension n sur le corps fini F_q d'ordre q, on définit, en prenant pour blocs les variétés linéaires de dimension h $(1 \leqq h \leqq n-1)$, un $[N(o, n), N(h, n), P(h, o), N(o, h), P(h, 1)]$ (resp. $[q^n, N(h, n) - N(h, n-1), P(h, o), q^h, P(h, 1)]$) avec, pour $h \leqq k$,

$$N(h, k) = \frac{(1+q+\ldots+q^k)(q+\ldots+q^k)\ldots(q^h+\ldots+q^k)}{(1+q+\ldots+q^h)(q+\ldots+q^h)\ldots(q^h)}$$

$$P(k, h) = \frac{(q^{h+1}+q^{h+2}+\ldots+q^n)(q^{h+2}+\ldots+q^n)\ldots(q^k+\ldots+q^n)}{(q^{h+1}+q^{h+2}+\ldots+q^k)(q^{h+2}+\ldots+q^k)\ldots(q^k)}$$

— Un plan affine (resp. projectif) fini d'ordre n (arguésien ou non) est un $[n^2, n^2+n, n+1, n, 1]$ (resp. $[n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1]$).

1.5. *Définition.* — On appelle *matrice d'incidence* d'un $[v, b, r, k, \lambda$ la matrice $A = (a_{ij})$ à v lignes et b colonnes définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i \in B_j \\ 0 & \text{si} \quad x_i \notin B_j \end{cases}$$

1.6. On montre le théorème:

Pour qu'une matrice de 0 *et de* 1 *à* v *lignes et* b *colonnes soit la matrice d'incidence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *il faut et il suffit que*

$$\begin{cases} A\,A^t = (r-\lambda)\,I_v + \lambda\,J_v \\ J_v\,A = k\,J_{vb} \end{cases}$$

(où J_v (resp. J_{vb}) est la matrice carrée d'ordre v (resp. à v lignes et b colonnes) dont tous les éléments sont égaux à 1).

1.7. On montre le théorème (inégalité de FISHER):

Dans un $[v, b, r, k, \lambda]$ *on a* $b \geq v$ (donc $r \geq k$).

1.8. *Définition.* — On appelle *plan symétrique* un plan pour lequel $v = b$ (donc $r = k$) et on écrira $[v, k, \lambda]$ au lieu de $[v, v, k, k, \lambda]$.

1.9. On montre le théorème:

Si A est la matrice d'incidence d'un plan symétrique, A^t est aussi la matrice d'incidence d'un plan (naturellement symétrique).

1.10. On en déduit par dualité le corollaire:
dans un plan symétrique on a la propriété

(A 2) *Quels que soient les blocs distincts B_j et B_l, $|B_j \cap B_l|$ est constant* $(= \lambda)$.

1.11. *Remarque.* — Enonçons les propriétés (An) et ($A'n$):

(An) Quels que soient les parties $B_{j_1}, \ldots, B_{j_n}$ de E deux à deux distinctes, $|B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_n}|$ est constant.

($A'n$) Quels que soient les éléments $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ de E deux à deux distincts, le nombre des parties contenant à la fois $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ est constant.

On montre ([1]):

(A 1) et ($A'n$) entraînent ($A'2$), ..., ($A'n-1$) (nous l'avons vérifié pour $n=2$)

($A'1$) et (An) entraînent (A 2), ..., ($An-1$).

Si un objet vérifiant ($A1$), ..., (Am), ($A'1$), ..., ($A'n$) est non trivial alors nécessairement: soit $m = 1$ et n est quelconque (ou $n = 1$ et m quelconque)

soit $m = 2$ et $n = 2$.

Ce qui fait que les plans symétriques constituent en quelque sorte une famille maximale d'objets combinatoires.

2. Questions d'existence

2.1. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda]$.

Il suffit en effet de remplacer tout bloc B_j par $E - B_j$.

2.2. *L'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$ *entraîne, pour tout entier* t, *celle d'un* $[v, tb, tr, k, t\lambda]$.

Il suffit en effet de répéter t fois chaque bloc.

Mais il peut exister un $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sans qu'il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Ainsi il existe un [15, 42, 14, 5, 4] mais pas de [15, 21, 7, 5, 2].

2.3. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *entraîne celle d'un* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *résiduel* du premier relativement à B_1) est constitué, sur $E - B_1$, des blocs $B_j \cap (E - B_1)$ $(j = 2, ..., v)$.

Ainsi le résiduel d'un plan projectif d'ordre n est un plan affine d'ordre n.

Réciproquement on montre:

Pour $\lambda = 1$ *ou* 2, *tout* $[v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda]$ *est résiduel d'un* $[v, k, \lambda]$. Le problème de cette réciproque n'est pas résolu pour $\lambda \geqq 3$. Toutefois il existe un [12, 33, 28, 8, 14] mais pas de [34, 22, 14].

2.4. *L'existence d'un* $[v, k, \lambda]$ *(ou* $\lambda \geqq 2$*) entraîne celle d'un* $[k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1]$.

B_1 étant un bloc du premier plan, le nouveau plan (appelé *dérivé* du premier relativement à B_1) est constitué, sur B_1, des blocs $B_j \cap B_1$ $(j = 2, ..., v)$.

2.5. Mais le plus beau résultat relatif à l'existence des plans équilibrés est le théorème de Bruck — Ryser — Chowla — Shrikhande — Schutzenberger:

Pour qu'il existe un $[v, k, \lambda]$ (où naturellement, compte tenu de (1.3), $\lambda(v-1) = k(k-1)$) *il est nécessaire que*

— *si* v *est pair,* $(k-\lambda)$ *soit un carré parfait,*

— *si* v *est impair, l'équation* $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$ *ait une solution non nulle en nombres entiers.*

Ainsi il n'existe pas de [22, 7, 2] ni de [43, 7, 1].

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas $k = 2$ étant trivial):

Si $k = 3$ *ou* 4 *les conditions nécessaires* (1.3) *sont aussi suffisantes pour l'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$.

Mais cela n'est plus vrai à partir de $k = 5$: ainsi [15, 21, 7, 5, 2] et [36, 42, 7, 6, 1] n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par b croissants (car $b \geqq v > k$ et $b > r > \lambda$) soit — c'est la tradition — par r croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand r est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour $r \leqq 15$. On y a toujours $v \geqq 2k$ (compte tenu de (2.1)) et les $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sont omis quand il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ([46, 69, 9, 6, 1] étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement: [56, 11, 2], [45, 12, 3], [36, 15, 6]. Signalons enfin une conjecture: v et k étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en b, r, λ) il existe toujours un $[v, b, r, k, \lambda]$ sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

3. Questions d'« unicité »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

Définition. — Deux $[v, b, r, k, \lambda]$ seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences A_1 et A_2 sont telles qu'il existe deux matrices de permutation P et Q, d'ordres v et b respectivement, vérifiant $A_1 = P A_2 Q$.

3.2. *Pour* $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ *il existe un seul plan projectif* (resp. *affine*) *d'ordre* n.

Mais ce n'est plus vrai pour $n = 9$. On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour n premier. Mais pour certaines valeurs de n primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre n non isomorphes deux à deux [3].

3.3. *Les plans pour lesquels* $k = 3$ et $\lambda = 1$ (appelés triplets de Steiner) *sont uniques pour* $v = 3, 7, 9$. *Il y a deux solutions pour* $v = 13$ *et* 80 *solutions pour* $v = 15$. Le nombre de solutions est inconnu pour $v > 15$.

3.4. Signalons enfin des résultats isolés ([4], [6]):

[11, 5, 2] *et* [12, 22, 11, 6, 5] *sont uniques*;

il y a 5 [15, 7, 3], 25 [16, 30, 15, 8, 7], ...

4. Conclusion

Nous n'aborderons pas la question très complexe de la construction effective des plans équilibrés. Signalons toutefois que, mis à part des procédés artisanaux utilisés dans quelques cas, les méthodes consistent le plus souvent à travailler dans les groupes finis: après avoir utilisé au maximum les groupes cycliques, puis abéliens finis on commence à faire intervenir les groupes non abéliens.

Redisons enfin pour terminer, que la théorie que nous venons de présenter possède encore une foule de problèmes ouverts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer (1968).

[2] Hall, M., *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ. Company (1967).

[3] Ryser, H. J., *Combinatorial mathematics*, Wiley (1963) (traduit en français et édité par Dunod (1969)).

[4] Bhat, V. N. et S. S. Shrikhande, « Non-isomorphic solutions of some balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 174-191.

[5] Hall, M., R. Lane et D. Wales, « Designs derived from permutation groups », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 12-22.

[6] Stanton, R. G. et R. C. Mullin, « Uniqueness theorems in balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 37-48.

[7] Wallis, J., « Two new block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 369-370.

(Reçu le 6 juillet 1971)

G. Heuzé

Département de Mathématiques

Université de Toulouse — Le Mirail

F-31 Toulouse