

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS
Kapitel: 1. GÉNÉRALITÉS
Autor: Heuzé, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44583>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS

par G. HEUZÉ

0. INTRODUCTION

Les plans équilibrés (on dit aussi plans en blocs incomplets équilibrés) sont apparus sous leur forme actuelle vers 1939. Mais depuis longtemps on s'intéressait à certains problèmes d'algèbre combinatoire qui sont des cas particuliers de plans équilibrés (par exemple les plans affines et projectifs finis). Le présent papier se propose de présenter la théorie en énonçant les principaux résultats.

Après le paragraphe 1 consacré aux généralités (définitions, exemples classiques et résultats fondamentaux) le paragraphe 2 fait le point sur la question de l'existence des plans équilibrés, question qui n'est encore que très partiellement résolue.

Le paragraphe 3 enfin donne les quelques résultats actuellement connus concernant le nombre de plans équilibrés ayant des paramètres donnés. Il s'agit là d'un problème qu'on commence tout juste à aborder...

Certains ouvrages récents développent largement cette théorie: [1], [3] et surtout [2] dans lequel on trouvera les démonstrations des résultats énoncés sans référence bibliographique. Par ailleurs [1] donne une bibliographie très complète concernant les articles antérieurs à 1968.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. *Définition.* — Un *plan équilibré* (nous dirons le plus souvent *plan*) sur un ensemble fini E ($|E|=v$) est constitué d'une famille (B_j) ($j=1, \dots, b$) de parties de E (appelées *blocs*) telles que

(A 1) pour tout $j = 1, \dots, b$, $|B_j|$ est constant ($=k$),

(A'2) pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de E , le nombre de blocs contenant x et y est constant ($=\lambda$),

$$1 \leq \lambda \text{ et } k \leq v - 2.$$

1.2. Nous en déduisons immédiatement la proposition:

(A'1) pour tout $x \in E$ le nombre de blocs contenant x est constant ($=r$).

En effet, désignons par r_x le nombre de blocs contenant x et dénombrons de deux façons différentes les couples (y, B) vérifiant $x \in B$ et $y \in B$. On obtient $r_x(k-1) = (v-1)\lambda$, d'où le résultat.

1.3. *Les paramètres v, b, r, k, λ d'un plan équilibré (nous noterons désormais $[v, b, r, k, \lambda]$ un tel plan) vérifient*

$$\begin{cases} bk = rv \\ \lambda(v-1) = r(k-1) \end{cases}$$

Nous venons de montrer la deuxième égalité. La première s'obtient en dénombrant de deux façons différentes les couples (x, B) vérifiant $x \in B$.

1.4. Exemples :

— Sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on définit un $[7, 7, 3, 3, 1]$ en prenant pour blocs : $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$

— Sur $E = P_n(F_q)$ (resp. $(F_q)^n$), espace projectif (resp. affine) de dimension n sur le corps fini F_q d'ordre q , on définit, en prenant pour blocs les variétés linéaires de dimension h ($1 \leq h \leq n-1$), un $[N(o, n), N(h, n), P(h, o), N(o, h), P(h, 1)]$ (resp. $[q^n, N(h, n) - N(h, n-1), P(h, o), q^h, P(h, 1)]$) avec, pour $h \leq k$,

$$N(h, k) = \frac{(1+q+\dots+q^k)(q+\dots+q^k)\dots(q^h+\dots+q^k)}{(1+q+\dots+q^h)(q+\dots+q^h)\dots(q^h)}$$

$$P(k, h) = \frac{(q^{h+1}+q^{h+2}+\dots+q^n)(q^{h+2}+\dots+q^n)\dots(q^k+\dots+q^n)}{(q^{h+1}+q^{h+2}+\dots+q^k)(q^{h+2}+\dots+q^k)\dots(q^k)}$$

— Un plan affine (resp. projectif) fini d'ordre n (arguésien ou non) est un $[n^2, n^2+n, n+1, n, 1]$ (resp. $[n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1]$).

1.5. *Définition.* — On appelle *matrice d'incidence* d'un $[v, b, r, k, \lambda]$ la matrice $A = (a_{ij})$ à v lignes et b colonnes définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in B_j \\ 0 & \text{si } x_i \notin B_j \end{cases}$$

1.6. On montre le théorème :

Pour qu'une matrice de 0 et de 1 à v lignes et b colonnes soit la matrice d'incidence d'un $[v, b, r, k, \lambda]$ il faut et il suffit que

$$\begin{cases} A A^t = (r - \lambda) I_v + \lambda J_v \\ J_v A = k J_{vb} \end{cases}$$

(où J_v (resp. J_{vb}) est la matrice carrée d'ordre v (resp. à v lignes et b colonnes) dont tous les éléments sont égaux à 1).

1.7. On montre le théorème (inégalité de FISHER):

Dans un $[v, b, r, k, \lambda]$ on a $b \geq v$ (donc $r \geq k$).

1.8. *Définition.* — On appelle *plan symétrique* un plan pour lequel $v = b$ (donc $r = k$) et on écrira $[v, k, \lambda]$ au lieu de $[v, v, k, k, \lambda]$.

1.9. On montre le théorème:

Si A est la matrice d'incidence d'un plan symétrique, A^t est aussi la matrice d'incidence d'un plan (naturellement symétrique).

1.10. On en déduit par dualité le corollaire:

dans un plan symétrique on a la propriété

(A 2) Quels que soient les blocs distincts B_j et B_l , $|B_j \cap B_l|$ est constant ($= \lambda$).

1.11. *Remarque.* — Enonçons les propriétés (An) et (A'n):

(An) Quels que soient les parties B_{j_1}, \dots, B_{j_n} de E deux à deux distinctes, $|B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_n}|$ est constant.

(A'n) Quels que soient les éléments x_{i_1}, \dots, x_{i_n} de E deux à deux distincts, le nombre des parties contenant à la fois x_{i_1}, \dots, x_{i_n} est constant.

On montre ([1]):

(A 1) et (A'n) entraînent (A'2), ..., (A'n-1) (nous l'avons vérifié pour $n=2$)

(A'1) et (An) entraînent (A 2), ..., (An-1).

Si un objet vérifiant (A1), ..., (Am), (A'1), ..., (A'n) est non trivial alors nécessairement: soit $m = 1$ et n est quelconque (ou $n = 1$ et m quelconque)

soit $m = 2$ et $n = 2$.

Ce qui fait que les plans symétriques constituent en quelque sorte une famille maximale d'objets combinatoires.