Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VUE D'ENSEMBLE SUR LA THÉORIE DES PLANS ÉQUILIBRÉS
Kapitel: 3. Questions d'« unicité »
Autor: Heuzé, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44583

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2.6. Signalons aussi le résultat suivant (le cas $k = 2$ étant trivial):

Si $k = 3$ *ou* 4 *les conditions nécessaires* (1.3) *sont aussi suffisantes pour l'existence d'un* $[v, b, r, k, \lambda]$.

Mais cela n'est plus vrai à partir de $k = 5$: ainsi [15, 21, 7, 5, 2] et [36, 42, 7, 6, 1] n'existent pas.

2.7. La classification des solutions entières des équations (1.3) peut être faite soit par b croissants (car $b \geqq v > k$ et $b > r > \lambda$) soit — c'est la tradition — par r croissants (il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions aux équations (1.3) quand r est fixé). On trouvera dans [2] une telle classification pour $r \leqq 15$. On y a toujours $v \geqq 2k$ (compte tenu de (2.1)) et les $[v, tb, tr, k, t\lambda]$ sont omis quand il existe un $[v, b, r, k, \lambda]$. Le nombre de plans dont l'existence est encore inconnue est important ([46, 69, 9, 6, 1] étant le plus «petit» de ceux-ci). Postérieurement à la parution de [2] certains de ces problèmes d'existence ont été résolus ([5], [7]) positivement: [56, 11, 2], [45, 12, 3], [36, 15, 6]. Signalons enfin une conjecture: v et k étant donnés (les équations (1.3) ont alors une infinité de solutions en b, r, λ) il existe toujours un $[v, b, r, k, \lambda]$ sauf peut-être dans un nombre fini de cas.

3. Questions d'« unicité »

3.1. Précisons d'abord ce qu'on entend par plans isomorphes.

Définition. — Deux $[v, b, r, k, \lambda]$ seront dits *isomorphes* si leurs matrices d'incidences A_1 et A_2 sont telles qu'il existe deux matrices de permutation P et Q, d'ordres v et b respectivement, vérifiant $A_1 = P A_2 Q$.

3.2. *Pour* $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ *il existe un seul plan projectif* (resp. *affine*) *d'ordre* n.

Mais ce n'est plus vrai pour $n = 9$. On conjecture toutefois l'unicité d'un tel plan pour n premier. Mais pour certaines valeurs de n primaire il existe au moins quatre plans projectifs (ou affines) d'ordre n non isomorphes deux à deux [3].

3.3. *Les plans pour lesquels* $k = 3$ et $\lambda = 1$ (appelés triplets de Steiner) *sont uniques pour* $v = 3, 7, 9$. *Il y a deux solutions pour* $v = 13$ *et* 80 *solutions pour* $v = 15$. Le nombre de solutions est inconnu pour $v > 15$.

3.4. Signalons enfin des résultats isolés ([4], [6]):

[11, 5, 2] *et* [12, 22, 11, 6, 5] *sont uniques*;

il y a 5 [15, 7, 3], 25 [16, 30, 15, 8, 7], ...

4. CONCLUSION

Nous n'aborderons pas la question très complexe de la construction effective des plans équilibrés. Signalons toutefois que, mis à part des procédés artisanaux utilisés dans quelques cas, les méthodes consistent le plus souvent à travailler dans les groupes finis: après avoir utilisé au maximum les groupes cycliques, puis abéliens finis on commence à faire intervenir les groupes non abéliens.

Redisons enfin pour terminer, que la théorie que nous venons de présenter possède encore une foule de problèmes ouverts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMBOWSKI, P., *Finite Geometries*, Springer (1968).

[2] HALL, M., *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ. Company (1967).

[3] RYSER, H. J., *Combinatorial mathematics*, Wiley (1963) (traduit en français et édité par Dunod (1969)).

[4] BHAT, V. N. et S. S. SHRIKHANDE, « Non-isomorphic solutions of some balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 174-191.

[5] HALL, M., R. LANE et D. WALES, « Designs derived from permutation groups », *J. of Combinatorial theory* (1970), pp. 12-22.

[6] STANTON, R. G. et R. C. MULLIN, « Uniqueness theorems in balanced incomplete block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 37-48.

[7] WALLIS, J., « Two new block designs », *J. of Combinatorial theory* (1969), pp. 369-370.

(Reçu le 6 juillet 1971)

G. Heuzé

Département de Mathématiques

Université de Toulouse — Le Mirail

F-31 Toulouse