§1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Jacques LESCA

§ 1. DÉFINITIONS ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

1.1. *Définition d'une suite μ-équirépartie*

Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, μ une mesure de $M_1^+(X)$, l'ensemble des mesures de Borel régulières, positives, de norme 1. Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X, nous dirons que u est μ-équirépartie si pour toute fonction f de $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (ensemble des fonctions réelles continues à support compact), la limite de la suite $n \to 1/n \sum_{i=1}^{n} f(u_i)$ existe et vaut $\mu(f)$. (Voir [3])

1.2. *Caractérisation des suites μ-équiréparties*

Soit $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ l'ensemble de fonctions définies dans X et à valeurs complexes, boréliennes et bornées.

Soit $\mathscr{C}_b(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions continues de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$.

Soient $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ le sous-ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann pour la mesure μ (en abrégé μ-$\mathscr{R}$-intégrable) c'est-à-dire des fonctions de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ dont l'ensemble des points de discontinuité ont une μ-mesure nulle, $\mathscr{R}'(X)$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ constitué par les fonctions caractéristiques à support compact, fonctions caractéristiques d'ensembles bornés dont la frontière à une μ-mesure nulle (ensembles dits μ-$\mathscr{R}$-intégrables).

Nous dirons qu'une sous famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ est *suffisante pour la mesure* μ si:

une suite $u = (u_n)$ est μ-équirépartie si et seulement si pour tout $f \in \mathscr{F}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \right) = \mu(f) .$$

Théorème A. — Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini et $u = (u_n)$ une suite de points de X alors

(1) Les familles $\mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ (par définition), $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ et $\mathscr{R}'(X)$ sont suffisantes pour la mesure μ.

(2) Si en outre X possède une base topologique dénombrable $\mathscr{R}(X, \mathbf{C})$ est la plus grande famille suffisante pour la mesure μ.

Rappelons qu'un espace localement compact possèdant une base topologique dénombrable est métrisable et par conséquent dénombrable à l'infini.

Théorème B. — Soit X un groupe abélien topologique localement compact. Alors la famille Γ de ses caractères continus est suffisante pour toute mesure μ.

1.3. *Existence de suites μ-équiréparties*

Par la suite nous supposons que X est un espace *topologique localement* compact *possédant une base dénombrable* et muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$; on désigne le tout par *espace-mesure* (X, μ).

Soit (X, μ) un espace-mesure. $X^{\mathbf{N}}$ désigne le produit d'une suite d'espaces identiques à X et $\mu^{\mathbf{N}}$ la « mesure produit » de mesures toutes identiques à μ.

La *Shift-Transformation* σ est l'application de $X^{\mathbf{N}}$ dans lui-même qui à $x = (x_1, x_2, \ldots)$ fait correspondre $\sigma(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Si $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ est une partie finie de $\mathbf{N}$, nous lui faisons correspondre X^J produit de r copies de X, X^J est muni de la mesure produit notée μ^J; (X^J, μ^J) est un *espace mesure*. La projection P_j: $X^{\mathbf{N}} \to X^J$ est définie par

$$P_j(x) = P_j((x_1, \ldots)) = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j_r})$$

P_j est une application continue et « mesure invariante ».

Théorème C. — Soient (X, μ) un *espace-mesure*, $u = (u_n)$ une suite croissante d'entiers et J une partie finie de $\mathbf{N}$.

Alors *pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$*, la suite $n \to P_J(\sigma^{u_n}(x))$ est *μ^J-équirépartie dans X^J.*

Comme corollaire du Théorème C on obtient, en faisant $J = \{1\}$ et $u_n = n$: *$\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite est μ-équirépartie.* En fait ce dernier résultat pourrait être déduit du *théorème ergodique individuel* (car σ est une application *mélangeante* et par *conséquent ergodique*), ou alors encore plus simplement de *la loi forte des grands nombres.*

Si X est compact alors $(X^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}})$ est un espace-mesure.

Théorème D. — Si (X, μ) est un *espace-mesure* et si, en outre, X est *compact*, si (u_n) est une suite croissante d'entiers, alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout x la suite $n \to \sigma^{u_n}(x)$ est $\mu_o^{\mathbf{N}}$-*équirépartie dans* $X^{\mathbf{N}}$.

(Il semble que, mis à part le cas ou $u_n = n$, le théorème D ne peut être déduit du théorème ergodique.)

1.4. *Espaces produit*

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces-mesures, considérons l'espace mesure $(X \times Y, \mu \times \nu)$. L'espace $\Omega = (X \times Y)^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure $\tau = (\mu \times \nu)^{\mathbf{N}}$ est naturellement identifié à l'espace produit $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure produit $\mu^{\mathbf{N}} \times \nu^{\mathbf{N}}$.

Il résulte du théorème D que, pour τ- presque toute suite $((x_n, y_n))$ de $X^{\mathbf{N}} \times Y^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$-équirépartie. Ce résultat est précisé par:

Théorème E. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux *espaces-mesures* et $y = (y_n)$ une suite ν-*équirépartie dans* Y. Alors, pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathbf{N}}$, la suite $n \to (x_n, y_n)$ est $\mu \times \nu$-*équirépartie dans* $X \times Y$.

Si Z est un espace localement compact et f: $X \times Y \to Z$ une application continue, la suite $n \to f(x_n, y_n)$ est alors équirépartie dans Z pour la mesure « image par f de $\mu \times \nu$ ». Utilisons cette dernière remarque, nous obtenons par exemple:

Si (y_n) est une suite de réels *équirépartie modulo* 1 au sens habituel: (la suite des images dans $\mathbf{R}/Z$ est h-*équirépartie*, h étant la mesure de Haar), alors la suite $u_n\, y_n$ est *équirépartie* modulo 1 pour $\mu^{\mathbf{N}}$-presque toute suite (u_n) d'entiers positifs, μ étant une *mesure quelconque* dans l'ensemble des entiers positifs.

A une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ d'une suite (x_n) faisons correspondre la fonction caractéristique de l'ensemble de ses indices $(\{\sigma(n) : n \in \mathbf{N}\})$. L'ensemble des sous-suites de (x_n) est ainsi *identifié* à l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ μ_α désigne la mesure définie dans $\{0, 1\}$ par $\mu_\alpha(\{1\}) = \alpha$.

Théorème F. — Soient (X, μ) un espace-mesure, (x_n) une suite *μ-équirépartie dans X* et α un nombre réel $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$.

Alors *$\mu_\alpha^{\mathbf{N}}$-presque toutes les sous-suites* de la suite x_n sont *μ-équiréparties dans X.*

1.5. *Généralisation*

Soit (X, μ) un espace-mesure. $A = (a_n^k)_{n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}^*}$ désigne une matrice infinie de nombres réels non négatifs. On dit qu'une suite $x = (x_n)$ de points de X est A-μ-équirépartie si, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C})$ la suite $n \to \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k f(u_k)$ qui existe, converge vers $\mu(f)$.

Supposons que pour tout *n la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k$ converge* et en outre que $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = 1$, alors les théorèmes A, B *se généralisent* sans difficultés pour la *A-μ-équirépartition.*

Si en outre il existe α positif tel que $\sup_{k=1}^{\infty} a_n^k = 0(n^{-\alpha})$, alors les théorèmes C, D et E et F *se généralisent pour la A-μ-équirépartition.*

§ 2. Première connexion de Galois

2.1. *Définitions*

Soit X un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur $M_1^+(X)$. Considérons la relation suivante entre une topologie τ de $\mathscr{T}$ et une application f de $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathbf{C})$: « *L'application $\mu \to \mu(f)$ est continue pour τ* ». Dans le cas où la relation est vraie nous écrivons $\tau \perp f$.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$ posons

$$B^* = \{\tau \in \mathscr{T} : \forall f \in B, \tau \perp f\}.$$

Si T est une partie de $\mathscr{T}$ posons

$$T^* = \{f \in B : \forall \tau \in T, T \perp f\}.$$

(Les deux applications $B \to B^*$ et $T \to T^*$ sont abusivement notés de la même façon). Les images par ces applications sont dites *saturées* (de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{T}$).

Si on restreint ces applications aux saturés on a deux isomorphismes inverses de treillis, inverses l'un de l'autre.

Si B est une partie de $\mathscr{B}$, alors B^* est un *intervalle initial fermé*, par exemple si $B = \mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ par définition $B^* = [v \to [$ est l'ensemble des topologies plus fines que la *topologie vague v.*