

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT
Kapitel: §4. Les espace-mesures
Autor: Lesca, Jacques
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44585>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

pour la mesure de Haar h dans Γ ; définissons $\hat{\chi}: X \rightarrow \mathbf{C}$, par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x) \chi(\gamma) dh(\gamma)$$

$\hat{\chi}$ appartient à $C_0(X)$. Pour une mesure de Borel régulière ν telle que $\|\nu\| < \infty$ on a

$$\nu(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x) d\nu(x) = \iint \gamma(x) \chi(\gamma) dh(\gamma) d\nu(x) = \int \chi(\gamma) \hat{\nu}(\gamma) dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque $\hat{\chi}$ appartient à $C_0(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{\tau(n)}(\chi)) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi(\gamma) \hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma) dh(\gamma) = \int \chi(\gamma) \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma).$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma) dh(\gamma) = \int \hat{\mu}(\gamma) d\gamma,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma) dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma). \quad (2)$$

Les fonctions f et μ sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1.$$

La mesure μ , mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que f est la transformée de Fourier-Stieltjès de μ et que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ . Il résulte de la proposition A que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$ converge vers $\mu(\gamma)$, par conséquent, on a $f = \mu$. Comme l'application $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ est injective on en déduit que la suite μ_n ne possède qu'un point d'accumulation μ ; elle converge donc vers μ .

§ 4. LES ESPACE-MESURES

4.1. Existence de familles suffisantes dénombrables

Proposition D. — Si X est un *localement compact* et possède une *base topologique dénombrable*, alors il existe un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(X, \mathbf{R})$ qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans \mathcal{C}_c et *suffisant*. (\mathcal{C}_c muni de la topologie de la convergence uniforme.)

Démonstration. L'ensemble des fonctions de X dans \mathbf{R} qui ont une limite à l'infini est séparable (voir Bourbaki [2], § 3, n° 3).

On en déduit, sans difficulté, que \mathcal{C}_c est séparable. Il existe donc une sous-famille \mathcal{F} de \mathcal{C}_c dénombrable et partout denses dans \mathcal{C}_c .

Montrons qu'une famille \mathcal{F} partout dense dans \mathcal{C}_c est suffisante.

Toute famille saturée de \mathcal{B} est fermée pour la topologie de la convergence uniforme et par conséquent \mathcal{F}^{**} qui contient \mathcal{F} contient \mathcal{C}_c . D'où l'on déduit que $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}^{****} \supset \mathcal{C}_c^{**}$. D'autre part, puisque \mathcal{F} est inclus dans \mathcal{C}_c , \mathcal{F}^{**} contient \mathcal{C}_c^{**} . On a donc $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{C}_c^{**}$, ce qui est une caractérisation des familles suffisantes.

4.2. Le point de vue ensembliste

Soient $u = (u_n)$ une suite de points d'un espace localement compact X muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$. Si M est une partie de X on note :

$$\begin{aligned} \Pi(M; n) &= \Pi((u_n); M; n) = \text{card} \{ i \in \mathbf{N} : 1 \leq i \leq n : u_i \in M \} \\ &= \sum_{i=1}^n \chi(u_i) \end{aligned}$$

(χ désignant la fonction caractéristique de M .)

On dira qu'une famille \mathcal{F} de parties de X est *suffisante pour la mesure μ* , si la famille des fonctions caractéristiques correspondantes est suffisante pour la mesure μ .

Proposition E. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Alors il existe une famille d'ouverts de X , qui est dénombrable, qui est une base topologique de X , et qui est *suffisante pour la mesure μ* .

Démonstration. D'après la proposition D, il existe une famille \mathcal{F} de fonctions de $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(\alpha, \mathbf{R})$ partout dense dans \mathcal{C}_c et dénombrable.

Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ considérons un ouvert précompact θ_f , qui contient le support de f et qui est μ - \mathcal{R} -mesurable.

D'autre part, considérons une partie dénombrable de \mathbf{R} , D_p , qui soit dense dans \mathbf{R} et telle que pour tout $x \in D_p$, $x \neq 0$, $\mu(f^{-1}(\{x\})) = 0$. A f associons la famille dénombrable d'ouverts

$$\mathcal{G}_f = \{ \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[) : a, b \in D_p, a \leq b \}.$$

Considérons enfin \mathcal{M}' l'union des familles \mathcal{G}_f , lorsque f parcourt \mathcal{F} et montrons que \mathcal{M}' est une base topologique de X . Soit x un point de X et U un ouvert contenant x ; il existe une fonction continue h à support compact qui vaut 1 au point x et 0 sur le complémentaire de U . Soit $f \in \mathcal{F}$

telle que $\sup_{x \in X} \{ |g(x) - h(x)| \} \leq 1/4$. Soit a, b appartenant à D_p tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de M' , $f^{-1}([a, b[)$; c'est un ouvert contenant x et inclus dans U .

Montrons maintenant que \mathfrak{M}' est suffisante pour la mesure μ . Désignons par \mathfrak{M} , la famille des fonctions caractéristiques des éléments de \mathfrak{M} . Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathfrak{R}'^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si M appartenant à \mathcal{G} , $M = \theta_f \cap f^{-1}([a, b[)$, M est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathcal{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[).$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[),$$

appartient à \mathfrak{M}^{oo} .

Comme \mathfrak{M}^{oo} est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que \mathcal{F} est inclus dans \mathfrak{M}^{oo} . On en déduit

$$\mathcal{F}^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo}. \tag{2}$$

Le fait que \mathfrak{M}' est une famille suffisante pour la mesure μ , est une conséquence de (1) et (2).

§ 5. EXISTENCE, PROPRIÉTÉS DES SUITES μ -ÉQUIRÉPARTIES IMAGE D'UNE SUITE μ -ÉQUIRÉPARTIE

5.1. *Démonstration du Théorème C*

Image d'une suite μ -équirépartie

Il est clair, puisque X^J est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathcal{B}(X^J, \mathbf{R})$ que pour μ_o^N -presque tout x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f).$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons