

I. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

I. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel, de dimension finie, sur le corps $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

1. RAPPELS

1.1. — [4] (page 101)

On note $\Lambda^p E$ la puissance extérieure p -ième de l'espace vectoriel E . Si $h : F \rightarrow E$ est une application linéaire, on note

$h^p : \Lambda^p F \rightarrow \Lambda^p E$ la puissance extérieure p -ième de h .

Si h est injective, h^p est aussi injective et on identifiera dans la suite $\Lambda^p F$ et son image par h^p .

Si h est un automorphisme de E , h^p est un automorphisme de $\Lambda^p E$ et l'opération de $Gl(E)$ dans $\Lambda^p E$ est définie par :

$$\begin{aligned} Gl(E) \times \Lambda^p E &\rightarrow \Lambda^p E \\ (h, \omega) &\rightarrow h^p(\omega) \end{aligned}$$

Dans le cas où E est de dimension finie n , soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de E ; alors

pour $p \leq n$ les p -vecteurs décomposables

$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p E$

pour $p > n$ $\Lambda^p E$ se réduit à 0.

1.2. — [2] (page 120)

Si $E = E_1 \oplus E_2$, on a un isomorphisme canonique,

$$\Lambda^p E \simeq \bigoplus_{0 \leq q \leq p} (\Lambda^q E_1 \otimes \Lambda^{p-q} E_2).$$

En particulier, si E_1 est un sous-espace de E de dimension 1, E_2 un supplémentaire quelconque de E_1 , donc de dimension $n - 1$, on a

$$\Lambda^p E \approx (E_1 \otimes \Lambda^{p-1} E_2) \oplus \Lambda^p E_2$$

Cela signifie que tout élément $\omega \in \Lambda^p E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \alpha \wedge \theta + \omega_2$$

où $\alpha \in E_1 \subset E$; $\theta \in \Lambda^{p-1}E_2 \subset \Lambda^{p-1}E$; $\omega_2 \in \Lambda^pE_2 \subset \Lambda^pE$.

REMARQUE. — Donc $\alpha \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \alpha \wedge \theta$.

1.3. — Si K est un corps, H un sous-corps de K , E un espace vectoriel sur le corps H , E_K l'espace vectoriel obtenu à partir de E par extension du corps des scalaires de H à K , alors;

a) l'application η de E dans E_K définie par $\eta(x) = 1 \otimes x$ est H -linéaire injective (ce qui permettra d'identifier E à un sous-ensemble de E_K) et l'ensemble des éléments de la forme $1 \otimes x$ engendre E_K .

b) si h est un homomorphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E' (espace vectoriel sur le corps H), il lui correspond un homomorphisme unique h_K de E_K dans E'_K tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta' \\ E_K & \xrightarrow{h_K} & E'_K \end{array}$$

Le noyau de h_K , K -er h_K , est engendré par $\eta(K\text{-er } h)$.

L'image de h_K , $Im . h_K$, est engendrée par $\eta'(Im h)$.

c) il y un isomorphisme canonique de Λ^pE_K sur $(\Lambda^pE)_K$.

Nous utiliserons ces remarques dans le cas où $H = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$.

REMARQUE. — En particulier $(E_{\mathbf{C}})^*$ et $(E^*)_{\mathbf{C}}$ sont canoniquement isomorphes, dès que E est un espace vectoriel réel de dimension finie. Nous les identifierons dans la suite et écrirons simplement $E_{\mathbf{C}}^*$.

2. LE RANG

2.1. — [4] (chapitre I)

DÉFINITION. — Soient E un espace vectoriel, $\omega \in \Lambda^pE$ un p -vecteur de E ; le *support* de ω est le plus petit sous-espace vectoriel $S_\omega \subset E$, tel que $\omega \in \Lambda^pS_\omega$; sa dimension est le *rang* de ω ; le *corang* de ω est la codimension de S_ω dans E .

Pour déterminer le rang d'un p -vecteur, nous utiliserons, principalement, les deux remarques suivantes, vraies si E est de dimension finie.

a) soient ω et ω' deux p -vecteurs, avec $p \geq 2$; si $\dim(S_\omega \cap S_{\omega'}) \leq p-2$, alors $S_{\omega+\omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$. En particulier, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$ alors, $\text{rang}(\omega + \omega') = \text{rang} \omega + \text{rang} \omega'$.

b) soient ω un p -vecteur et ω' un q -vecteur, non nuls, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$, alors $S_{\omega \wedge \omega'} = S_\omega \oplus S_{\omega'}$ et $\text{rang} \omega \wedge \omega' = \text{rang} \omega + \text{rang} \omega'$.

2.2 — Si n est la dimension de E , supposé de dimension finie, on désigne par $\Sigma_{n,r}^p$ l'ensemble des p -vecteurs de rang r . On sait [2] (page 104) que

a) pour $3 \leq p \leq n-3$ cet ensemble est non vide si et seulement si $r = 0, p, p+2, p+3, \dots, n$

b) pour les valeurs de r précédentes $\Sigma_{n,r}^p$ est une sous-variété régulière de $\Lambda^p E$, de dimension $C_r^p + r(n-r)$.

2.3. — *Le rang est invariant dans l'action canonique du groupe $Gl(E)$ dans $\Lambda^p E$.*

2.4. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie; désignons par E_C son complexifié. $\Lambda^p E$ peut être considéré comme un sous-espace réel de $\Lambda^p E_C$. Soit ω un élément de $\Lambda^p E$, désignons par ω_C le même élément envisagé comme élément de $\Lambda^p E_C$.

PROPOSITION. — $S_{\omega_C} = (S_\omega)_C$ et, ω et ω_C ont même rang.

3. LONGUEUR. B — LONGUEUR

Dans la suite on désigne par n la dimension de E .

3.1. — *Longueur — expression minimale* [4] (page 112)

Soit ω un p -vecteur non nul; ω peut s'écrire comme somme d'éléments décomposables de $\Lambda^p E$ (d'une manière qui n'est pas unique).

Considérons l'ensemble F , des systèmes libres $s = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ d'éléments décomposables de $\Lambda^p E$ tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$$

Le nombre $l(\omega) = \inf_{s \in F} k$ s'appelle *la longueur de ω* .

Soit alors $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ un élément de F tel que $k = l(\omega)$

$$\sum_{i=1}^{l(\omega)} \omega_i \text{ s'appelle une expression minimale de } \omega.$$

REMARQUES. — 1) Il est clair que la longueur d'un p -vecteur ω est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\Lambda^p E$.

2) Nous verrons (chapitre III, B. 2) que par passage au complexifié, la longueur d'un élément ω de $\Lambda^p E$, E espace vectoriel réel, n'est pas conservée. En désignant par ω_C l'image de ω par l'injection canonique de $\Lambda^p E$ dans $\Lambda^p E_C$, on a

$$l(\omega_C) \leq l(\omega).$$

3.2. — B -Longueur B -expression minimale.

Soit B l'ensemble des bases b de E et soit ω un élément non nul de $\Lambda^p E$. A chaque $b = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in B$ on peut associer un système libre unique $s_b, (\omega_1, \dots, \omega_k)$, d'éléments décomposables de $\Lambda^p E$ tels que

$$\omega_i = \lambda_i \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$$

$\forall i, 1 \dots k$ et $\sum_{i=1}^k \omega_i = \omega$. Une telle expression s'appelle B -expression de ω .

Soit $F = \{s_b \mid b \in B\}$. Le nombre $L(\omega) = \inf_{s_b \in F} k$ s'appelle la B -longueur de ω .

Soit $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ un élément de F tel que $k = L(\omega)$, $\sum_{i=1}^k \omega_i$ s'appelle une B -expression minimale de ω .

REMARQUES. — 1) La B -longueur d'un p -vecteur non nul est toujours supérieure ou égale à sa longueur

$$l \leq L$$

2) La B -longueur d'un élément ω de $\Lambda^p E$ est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\Lambda^p E$.

3) La B -longueur n'est pas invariante par passage au complexifié (chapitre III, B. 2). Une base de E , espace vectoriel réel, étant aussi une base de E_C , nous aurons avec des notations évidentes $L(\omega_C) \leq L(\omega)$ pour tout $\omega \in \Lambda^p E$.

4. REMARQUE GÉNÉRALE

Les classifications ultérieures seront faites en envisageant les rangs successifs croissants.

Désignons par k le corps de base (\mathbf{R} ou \mathbf{C}). Nous savons que l'ensemble, $\Sigma_{n,r}^p$, des p -vecteurs de rang r de $\Lambda^p k^n$, est une réunion de trajectoires de $Gl(n)$.

La classification des p -vecteurs de rang r dans $\Lambda^p k^n$ se réduit à celle des p -vecteurs de rang r dans $\Lambda^p k^r$; en effet soient ω_1 et ω_2 deux éléments de rang r de $\Lambda^p k^n$; alors, modulo une transformation linéaire convenable, on peut supposer leurs supports confondus en un même sous-espace S de dimension r ; si une transformation linéaire, $h \in Gl(k, n)$, échange ω_1 et ω_2 , elle laisse invariant S et sa restriction à S échange ω_1 et ω_2 , envisagés en tant qu'éléments de $\Lambda^p S$; la réciproque est évidente.

Il est clair qu'à chaque orbite de $Gl(k, r)$ dans $\Sigma_{r,r}^p$ (variété des p -vecteurs de rang r dans $\Lambda^p k^r$) correspond biunivoquement une orbite de $Gl(k, n)$ dans $\Sigma_{n,r}^p$ (variété des p -vecteurs de rang r dans $\Lambda^p k^n$), de même codimension.

La classification des p -vecteurs de rang r sera donc faite dans un espace de dimension r .

5. REMARQUES

Dans la suite, $I(D)$ désigne l'idéal de ΛE , engendré par D , droite de l'espace vectoriel E de dimension finie et $\tilde{\omega}_D$ l'image du trivecteur ω par l'application canonique: $\Lambda^3 E \rightarrow \Lambda^3 E/D$.

5.1. — $\omega_D = 0 \Leftrightarrow \omega \in I(D)$.

5.2. — Si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes, et $\omega \in I(D_1) \cap I(D_2)$ alors ω est décomposable.

5.3. — Si $\tilde{\omega}_D$ est décomposable, alors l'image réciproque du support de $\tilde{\omega}$ par la projection canonique de E sur E/D est un 4-plan, $H(D, \omega)$, contenant D , que nous désignerons simplement par H_D pour ω fixé. D'autre part, à tout 3-plan P de H_D , ne contenant pas D , est attaché un élément ω_1 , de $\Lambda^3 P$ tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D)$.

5.4. — Si D et Δ sont deux droites telles que: $\omega \in I(\Delta)$, $\omega \notin I(D)$ et $\tilde{\omega}_D$ décomposable, alors Δ est contenue dans H_D .

En effet, si on désigne par $\tilde{\Delta}$ la projection de Δ sur E/D , il est clair que $\tilde{\omega}_D$ est un élément de l'idéal de $\Lambda E/D$ engendré par $\tilde{\Delta}$.

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E , telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D' . D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\Lambda^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \quad \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \quad \text{où} \quad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et} \\ \omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. ETUDE DE $\Sigma_{n,5}^3$ ($k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C})

1. PROPOSITION

Pour tout ω élément de $\Lambda^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

DÉMONSTRATION. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\Lambda^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E . La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega - \omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

COROLLAIRE. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma_{n,5}^3$, il existe une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma_{n,5}^3$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension 5 ($n-3$).