II. Etude de $\sum_{n,5}^3 \quad (k = R ou C)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\wedge^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \; \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$
$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\wedge^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\wedge^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega - \omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.

2. REMARQUES

2.1. — L'expression (1) est pour ω, à la fois une expression minimale et une B-expression minimale: $l(\omega) = L(\omega) = 2$.

2.2. — Soit ω un élément quelconque de $\Sigma^3_{n,5}$, et Δ la droite unique, telle que ω est élément de $I(\Delta)$, alors quel que soit le sous-espace E_1, avec $S\omega = \Delta \oplus E_1$, on a $\omega \in \Delta \otimes \wedge^2 E_1$.

2.3. — Si E est hermitien (ou euclidien), compte tenu des propriétés des bivecteurs, la base, dans laquelle ω s'écrit sous forme canonique, peut-être choisie orthonormée.

III. ETUDE DE $\Sigma^3_{6,6}$

A. — CAS COMPLEXE

Nous envisageons d'abord le cas où E est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps des complexes.

1. RECHERCHE DE MODÈLES

1.1. — PROPOSITION 1. — *Tout élément de $\Sigma^3_{6,6}$ peut s'écrire sous l'une des deux formes*

(1) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

(2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ étant une base de E. Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

1.2. — LEMME 1. — Soient γ_1 et γ_2 deux élément de $\wedge^2 E$, de rang 4, de même support $F \subset E$. Alors, il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ soit décomposable. En effet, $\wedge^4 F$ est une droite domplexe contenant $\gamma_i \wedge \gamma_j$ $i.j = 1,2$: $\gamma_1 \wedge \gamma_1$ est non nul; posons $\gamma_2 \wedge \gamma_2 = a\gamma_1 \wedge \gamma_1$, $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = b\gamma_1 \wedge \gamma_1 \qquad b \in \mathbf{C} \text{ (}b\text{ pouvant être nul)}$$

pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = \gamma_1 \wedge \gamma_1 (a - 2\mu b + \mu^2)$ donc il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = 0$ ce qui signifie que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ est décomposable.