

# III. Etude de $\sum_{6,6}^3$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2. REMARQUES

2.1. — L'expression (1) est pour  $\omega$ , à la fois une expression minimale et une  $B$ -expression minimale:  $l(\omega) = L(\omega) = 2$ .

2.2. — Soit  $\omega$  un élément quelconque de  $\Sigma_{n,5}^3$ , et  $\Delta$  la droite unique, telle que  $\omega$  est élément de  $I(\Delta)$ , alors quel que soit le sous-espace  $E_1$ , avec  $S\omega = \Delta \oplus E_1$ , on a  $\omega \in \Delta \otimes \wedge^2 E_1$ .

2.3. — Si  $E$  est hermitien (ou euclidien), compte tenu des propriétés des bivecteurs, la base, dans laquelle  $\omega$  s'écrit sous forme canonique, peut-être choisie orthonormée.

## III. ETUDE DE $\Sigma_{6,6}^3$

### A. — CAS COMPLEXE

Nous envisageons d'abord le cas où  $E$  est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps des complexes.

#### 1. RECHERCHE DE MODÈLES

1.1. — PROPOSITION 1. — *Tout élément de  $\Sigma_{6,6}^3$  peut s'écrire sous l'une des deux formes*

$$(1) \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

$$(2) \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  étant une base de  $E$ . Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

1.2. — LEMME 1. — Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux éléments de  $\wedge^2 E$ , de rang 4, de même support  $F \subset E$ . Alors, il existe  $\mu \in \mathbf{C}$  tel que  $\gamma_2 - \mu\gamma_1$  soit décomposable. En effet,  $\wedge^4 F$  est une droite complexe contenant  $\gamma_i \wedge \gamma_j$   $i, j = 1, 2$ :  $\gamma_1 \wedge \gamma_1$  est non nul; posons  $\gamma_2 \wedge \gamma_2 = a\gamma_1 \wedge \gamma_1$ ,  $a \in \mathbf{C}$ ,  $a \neq 0$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = b\gamma_1 \wedge \gamma_1 \quad b \in \mathbf{C} \text{ (} b \text{ pouvant être nul)}$$

pour tout  $\mu \in \mathbf{C}$   $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = \gamma_1 \wedge \gamma_1 (a - 2\mu b + \mu^2)$  donc il existe  $\mu \in \mathbf{C}$  tel que  $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = 0$  ce qui signifie que  $\gamma_2 - \mu\gamma_1$  est décomposable.

REMARQUE. — Si  $E$  est un espace vectoriel sur le corps des réels, dans les hypothèses du lemme 1, deux cas pourront se présenter :

- 1) il existe  $\mu \in \mathbf{R}$  tel que  $\gamma_1 - \mu\gamma_2$  soit décomposable.
- 2) quel que soit  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\gamma_1 - \mu\gamma_2$  est de rang 4 et de support  $F$ .

1.3. — LEMME 2. — *Quel que soit  $\omega \in \Sigma_{6,6}^3$ , il existe un élément  $\alpha \neq 0$  de  $E$ , tel que  $\alpha \wedge \omega$  soit un élément décomposable de  $\Lambda^4 E$ .*

DÉMONSTRATION. — Soit  $\omega$  un élément de  $\Sigma_{6,6}^3$  et soit  $\beta$  un élément non nul quelconque de  $E$ . D'après I 1.2., en choisissant pour  $E_1$  le sous-espace engendré par  $\beta$ , on peut écrire  $\omega = \beta \wedge \gamma_1 + \omega_1$  avec  $E_1 \oplus E_2 = E$ ,  $\omega_1 \in \Lambda^3 E_2 \subset \Lambda^3 E$ ,  $\gamma_1 \in \Lambda^2 E_2 \subset \Lambda^2 E$ .  $\omega_1$  est au maximum de rang 5. Le seul cas à envisager est donc celui où  $\omega_1$  est de rang 5 et  $\gamma_1$  de rang 4. Donc  $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \gamma_2$  où  $\gamma_2 \in \Lambda^2 E_2$ . Si  $\alpha_1 \in S_{\gamma_1}$  la conclusion est immédiate. Si  $\alpha_1 \notin S_{\gamma_1}$  en choisissant  $S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$  (II), et en utilisant le lemme 1, on voit facilement que  $\beta + \mu\alpha_1$  convient.

REMARQUE. — Il est possible de démontrer le lemme 2 par l'argument géométrique suivant. Soit  $\omega \in \Lambda^3 E$ , supposons que, pour toute droite  $D \subset E$ , l'image  $\omega_D$  de  $\omega$  dans  $\Lambda^3 E/D$  est de rang 5; il correspond à  $\omega_D$  (II) une droite dans  $E/D$ , qui définit un plan  $P$  contenant  $D$  dans  $E$ . Soit  $\Delta$  l'orthogonale de  $D$  dans  $P$ ; l'application  $D \rightarrow \Delta$  définirait un automorphisme de l'espace projectif  $P_5(\mathbf{C})$  sans point fixe, d'où contradiction.

1.4. — *Démonstration de la proposition*

Choisissons donc pour  $\alpha$  un élément de  $E$  tel que  $\alpha \wedge \omega$  soit décomposable

$$\omega = \alpha \wedge \gamma_1 + \omega_1 \quad \text{avec} \quad S_{\gamma_1} + S_{\omega_1} = E_2$$

Si  $\gamma_1$  est de rang 2  $S_{\gamma_1} \oplus S_{\omega_1} = E_2$ .

Il existe donc une base de  $E$   $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6 \tag{1}$$

Si  $\gamma_1$  est de rang 4  $S_{\gamma_1} \cap S_{\omega_1}$  est de dimension 2. Soit  $\alpha_2, \alpha_4$  une base de  $S_{\gamma_1} \cap S_{\omega_1}$ . Deux cas peuvent se présenter :

a)  $\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \gamma_1 = 0$ . Donc [3].

$\gamma_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha_3 \wedge \alpha_5$  où  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_5$  est une base de  $S_{\gamma_1}$ .

Soit  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$  une base de  $S_{\omega_1}$ .

Alors,  $\omega = (\alpha + \alpha'_6) \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5$  et nous retrouvons l'expression (1).

b)  $\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \gamma = 0$ . Donc [3].

$\gamma_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5$  avec  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  base de  $S_{\gamma_1}$ .

Par conséquent il existe une base  $\{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$  de  $E$  telle que:

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 \quad (2)$$

1.5. — REMARQUES. — a) J. A. SCHOUTEN commence la démonstration de la Prop 1 d'une manière tout à fait analogue à la précédente. En effet, après avoir remarqué que pour tout trivecteur  $\omega$  de rang plus grand que 3, il existe toujours une forme  $u$  telle que  $\omega Lu$  soit de longueur supérieure à 1, il envisage un tel  $u$  pour  $\omega$  de rang 6 donné, alors  $\omega Lu$  est de longueur 2 et dans une base telle que  $e_6$  (par ex.) soit dual de  $u$ ,  $\omega$  s'écrit  $\omega = \omega' + \omega''$  avec  $\omega' = e_6 \wedge v$ , où  $v$  est un bivecteur de longueur 2,  $\omega''$  un trivecteur. Les supports de  $v$  et  $\omega''$  sont contenus dans un espace  $E_5$ , de dimension 5, transverse à  $e_6$ . Si  $\omega''$  est décomposable, la démonstration se poursuit comme ci-dessus dans le cas où  $\gamma$  est de rang 4. Si  $\omega''$  est de rang 5, la discussion est beaucoup plus longue et plus compliquée. Elle fait intervenir les positions respectives du support de  $v$  et de la direction invariante associée à  $\omega''$ , dans le support de  $\omega''$ , ainsi que celles des supports des 2 trivecteurs décomposables dont la somme est  $\omega''$  et des supports des 2 bivecteurs décomposables dont la somme est  $v$ . Les invariants géométriques dont nous parlons dans la remarque suivante sont obtenus en utilisant les enveloppes des hyperplans déterminés par les formes  $u$  telles que  $\omega Lu$  soit décomposable.

b) *Invariants géométriques.* —  $\omega$  étant un trivecteur de rang 6, considérons 2 droites  $D$  et  $D'$  telles que  $(I_5) \tilde{\omega}_D$  et  $\tilde{\omega}_{D'}$  soient décomposables. Alors 2 cas peuvent se présenter.

$D \subset H_{D'}$ ,  $\omega$  est donc un élément de  $I(D) + I(D')$  et,  $D' \subset H_D$ ,  $D' \not\subset H_D$ . Soit  $F = H_D \cap H_{D'}$ ,  $2 \leq \dim F \leq 3$ .

Choisissons dans  $H_D$  un sous-espace  $P$  de dimension 3 contenant  $F$  et dans  $H_{D'}$  un sous-espace  $P'$  de dimension 3 contenant  $F$ . Il existe  $\omega_1$  et  $\omega'_1$  tels que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D); \quad \omega - \omega'_1 \in I(D'); \quad S_{\omega_1} \cap S_{\omega'_1} = F$$

$\omega_1 - \omega'_1$  est donc un élément décomposable de  $I(D) + I(D')$  et par

conséquent  $\omega_1 = \omega'_1$ . Donc  $F$  est de dimension 3 et  $\omega_1 - \omega'_1$  est un élément de  $I(D) \cap I(D')$ .  $\omega$  s'écrit donc  $\omega = \omega_1 + \omega_2$   $D \subset S\tilde{\omega}_2$ ,  $D' \subset S_{\omega_2}$ ,  $S_{\omega_1} \cap S_{\omega_2} = \{0\}$ . C'est à dire que  $\omega$  est de type (1).

CONSÉQUENCES. —  $\alpha$  Si  $\omega$  est de type (2)

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6.$$

Il est clair que si  $D$  est contenue dans  $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$ , alors  $\omega_D$  est décomposable. Réciproquement, soit  $D$  telle que  $\tilde{\omega}_D$  soit décomposable. Désignons par  $D_i$  ( $i = 1, 2, 4$ ) la droite de  $E$  engendrée par  $\alpha_i$ . Alors,  $D \subset H_{D_1}$ ,  $D \subset H_{D_2}$  donc  $D \subset H_{D_1} \cap H_{D_2}$  et  $D \subset S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$ .

Donc  $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$  est le sous-espace des droites  $D$  de  $E$ , telles que  $\tilde{\omega}_D$  soit décomposable.

$\beta$  Si  $\omega$  est de type (1)

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

Il est clair que pour toute droite  $D$  de  $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$  (resp.  $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$ ),  $\tilde{\omega}_D$  est décomposable.

Réciproquement, soit  $D$  telle que  $\tilde{\omega}_D$  soit décomposable. Utilisons les notations précédentes.

\* Si  $D$  est contenue dans deux  $H_{D_i}$  pour  $i = 1, 2, 3$ , (resp.  $= 4, 5, 6$ ) alors  $D$  est contenue dans  $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$  (resp.  $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$ )

\*\* Si non, soit par exemple

$$D \not\subset H_{D_1}, D \not\subset H_{D_2}. \text{ Posons } H_{D_1} \cap H_D = P_1; H_{D_2} \cap H_D = P_2.$$

Alors, la dimension de  $P_1 \cap P_2$  est au moins 2 et  $P_1 \cap P_2$  est contenu dans  $H_{D_1} \cap H_{D_2}$  et

$$\begin{array}{lll} \omega = \omega_1 + \omega_2 & S_{\omega_1} = P_1 & \omega_2 \in I(D_1) \cap I(D) \\ \omega = \omega'_1 + \omega_2 & S_{\omega'_1} = P_2 & \omega'_2 \in I(D_2) \cap I(D) \end{array}$$

$\omega_1 - \omega'_1 = \omega'_2 - \omega_2$   $\omega_1 - \omega'_1$  est une décomposable dont le support contient  $P_1 \cap P_2$ . Donc  $\omega_1 = \omega'_1$ ,  $\omega_2 = \omega'_2$  et  $P_1 = P_2 = H_{D_1} \cap H_{D_2}$ ,  $D \subset S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$ .

Les droites  $D$  de  $E$  telles que  $\tilde{\omega}_D$  soit décomposable sont donc soit les droites de  $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$  soit les droites de  $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$ . Ceci entraîne en particulier que la décomposition de  $\omega$  sous la forme  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  avec  $S_{\omega_1} \cap S_{\omega_2} = \{0\}$  est unique.

c) Si  $E$  est un espace vectoriel sur le corps des réels, les éléments  $\omega$  de  $\Sigma_{n,6}^3$  pour lesquels il existe  $\alpha \in E$ ,  $\alpha \neq 0$ , avec  $\alpha \wedge \omega$  décomposable, s'écriront aussi sous la forme (1) ou sous la forme (2).

## 2. TRAJECTOIRES

### 2.1. — Remarques préliminaires

En chaque point de  $\Lambda^3 E$ , l'espace tangent à  $\Lambda^3 E$  sera identifié à  $\Lambda^3 E$ .

Désignons par  $\Sigma$ , le cône des éléments décomposables de  $\Lambda^3 E$ , si  $\omega$  est un élément de  $\Sigma$ , on note  $T_\omega$  l'espace tangent à  $\Sigma$  au point  $\omega$ .

Soit  $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$  un élément de  $\Sigma$   $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$  étant une base de  $E$ . Une représentation paramétrique d'un voisinage de  $\omega$  dans  $\Sigma$  est  $\lambda [(\alpha_1 + a_1) \wedge (\alpha_2 + a_2) \wedge (\alpha_3 + a_3)]$  où  $a_i = \sum_{j=4}^6 a_i^j \alpha_j$  et  $\lambda, a_i^j \in k$ .

Donc l'espace tangent,  $T_\omega$ , en  $\omega$  à  $\Sigma$  est l'ensemble des vecteurs  $\mu(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) + \sum_{j=4}^6 \varepsilon_1^j \alpha_j \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \sum_{j=4}^6 \varepsilon_2^j \alpha_1 \wedge \alpha_j \wedge \alpha_3 + \sum_{j=4}^6 \varepsilon_3^j \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_j$ .

$T_\omega$  est donc engendré par les éléments  $\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k$  où  $\{i, j, k\} \cap \{1, 2, 3\}$  contient au moins 2 éléments.

2.2. — PROPOSITION 2. — *L'ensemble  $T_1$ , des trivecteurs de rang 6 et de longueur deux est une trajectoire ouverte de  $Gl(E)$  dans  $\Lambda^3 E$ .*

Il est clair que cet ensemble constitue une trajectoire de  $Gl(E)$  qui est une sous-variété de  $\Lambda^3 E$ , en tant que trajectoire d'un groupe de Lie. Il reste à déterminer sa dimension.

Les  $\omega$  s'écrivant sous la forme (1) sont caractérisés par

$$\left[ \begin{array}{l} \omega = \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_i \in \Sigma \quad i \in \{1, 2\} \\ \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } U \subset \Sigma \times \Sigma \quad U = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0\}$$

$f : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Lambda^6 E$  définie par  $f(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2$  est continue. Donc  $U$  est ouvert.

Soit  $h : U \rightarrow \Lambda^3 E$  définie par  $h(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$   $h$  est différentiable et  $h' : T_{\omega_1} \oplus T_{\omega_2} \rightarrow \Lambda^3 E$  est telle que  $h'(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 + \eta_2$ .

Soit  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$  une base de  $E$  telle que

$$\omega_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3, \quad \omega_2 = \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

$T_{\omega_1} \cap T_{\omega_2} = \{0\}$  donc  $\text{Ker } h' = \{0\}$  et  $h'$  est un difféomorphisme local. L'image de  $U$  par  $h$  est donc un ouvert.

2.3 — PROPOSITION 3. — *L'ensemble,  $T_2$ , des trivecteurs de rang 6 qui s'écrivent sous la forme (2) est une trajectoire de codimension 1.*

Il est clair que cet ensemble est une trajectoire de  $Gl(E)$ . Nous avons à déterminer sa dimension.

Les  $\omega$  qui s'écrivent sous la forme (2) sont caractérisés par :

$$\left[ \begin{array}{l} \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ \omega_i \in \Sigma \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \dim S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j} = 1 \\ S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j} \not\subset S_{\omega_k} \text{ pour } i \neq j \neq k \neq i \\ i, j, k \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right] \text{ conditions (a)}$$

Soit  $V \subset \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ ,  $V = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, S_{\omega_3} \text{ vérifient (a)}\}$ .

$V$  est une sous-variété régulière de codimension 3, en effet, considérons

$$\begin{array}{l} f_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ f_i : \Sigma \times \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Lambda^6 E \simeq k \end{array}$$

$f_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_j \wedge \omega_k$  où  $i, j, k$  est une permutation paire de 1, 2, 3.

$V$  est l'ensemble des  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  où  $f_i = f_2 = f_3 = 0$  et où  $df_1, df_2, df_3$  sont linéairement indépendantes.

Soit  $h : \Sigma \times \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Lambda^3(E)$  définie par

$$h(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

la restriction  $f$  de  $h$  à  $V$  est de rang 19.

En effet, en un point de  $V$ , il existe un seul vecteur de base de  $\Lambda^3(E)$  qui ne se laisse pas écrire dans  $T_{\omega_1} + T_{\omega_2} + T_{\omega_3}$ , c'est avec les notations précédentes  $\alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$ . D'autre part,  $\text{Ker } h'$  est transverse à l'espace tangent à  $V$  en un point de  $V$ .  $f$  est donc aussi de rang 19 et  $f(V)$  est une sous-variété de codimension 1.

REMARQUE. — Soit  $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$ .

Si nous faisons dans  $E$  le changement de base

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + \gamma_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + \frac{\gamma_2}{2}, \quad \alpha_5 = \frac{\beta_2}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad \alpha_4 = 2\beta_3 + \gamma_3, \quad \alpha_3 = \beta_3 + \gamma_3,$$

il vient

$$\omega = -\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 - \frac{1}{4} \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 + (\beta_1 + \gamma_1) \wedge (\beta_2 + \gamma_2) \wedge (\beta_3 + \gamma_3).$$

Nous avons deux expressions minimales de  $\omega$ . Dans la première les supports des  $\omega_i$  ont deux à deux une droite en commun, dans la seconde, ils sont deux à deux en position de somme directe. Ce résultat met en défaut la conjecture de J. Martinet [4] (page 113).

3. — Si  $E$  est de dimension  $n$ , il est clair que la proposition 1 reste vraie en remplaçant  $\Sigma_{6,6}^3$  par  $\Sigma_{n,6}^3$ . Les propositions 2 et 3 deviennent:

**PROPOSITION 2.** — *L'ensemble des trivecteurs de rang 6 et de longueur 2 est une trajectoire ouverte dans  $\Sigma_{n,6}^3$ .*

**PROPOSITION 3.** — *L'ensemble des trivecteurs de rang 6 et de longueur 3 est une trajectoire de codimension un dans  $\Sigma_{n,6}^3$ , c'est-à-dire de dimension  $19 + 6(n-6)$ .*

## B. — CAS RÉEL

Dans la suite  $E$  désigne un espace vectoriel réel de dimension  $n = 6$ .

1. — Désignons par  $E_C$  le complexifié de  $E$

$\Sigma_{C6,6}^3$  l'ensemble des éléments de rang 6 de  $\Lambda^3 E_C$

$\omega_C \in \Lambda^3 E_C$  l'image canonique de  $\omega \in \Lambda^3 E$

(très souvent on identifiera  $\omega$  et  $\omega_C$ ).



$E$  est identifié au sous-ensemble des éléments  $1 \otimes \alpha$  de  $E_C$  où  $\alpha \in E$ .

Une base de  $E$  étant aussi une base de  $E_C$ , il est clair, en considérant les formes canoniques obtenues pour les différents éléments de  $\Lambda^3 E_C$ , que toutes les trajectoires de  $Gl(E_C)$  dans  $\Lambda^3 E_C$  rencontrent  $\Lambda^3 E$ .

PROPOSITION 1. — *Tout trivecteur de rang 6 s'écrit sous l'une des formes*

$$(1)_a \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

$$(1)_b \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 - \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

$$(2) \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  étant une base de  $E$ .

DÉMONSTRATION. — Soit  $\omega$  un élément de  $\Sigma_{6,6}^3$ . Utilisons la remarque 1 et les démonstrations des lemmes 1 et 2 de  $A$ . Le seul cas à examiner est celui où nous ne savons pas s'il existe  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha \in E$ ) tel que  $\alpha \wedge \omega$  soit décomposable. Alors  $\omega = \alpha \wedge \gamma_1 + \alpha_1 \wedge \gamma_2$  où  $\alpha \in E$   $\alpha \neq 0$  quelconque  $\Delta_1$  est la droite engendrée par  $\alpha_1$ ;

$E_1$  la droite engendrée par  $\alpha$ ;  $E = E_1 \oplus E_2$ ;  $E_2 = \Delta_1 \oplus S_{\gamma_1}$ ;  
 $S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2} = F$ ;  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 \in \Lambda^2 F$  de rang 4.

Chacun de ces sous-espaces en engendre un dans  $E_C$ .

Nous reprenons la démonstration du lemme 1 avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Alors, l'équation  $a - 2\mu b + \mu^2 = 0$ , a deux racines complexes conjuguées

$$x = b + ic \quad , \quad \bar{x} \quad c \neq 0.$$

$\gamma_2 - x\gamma_1$  et  $\gamma_2 - \bar{x}\gamma_1$  sont deux éléments décomposables de  $\Lambda^2 F_C$ . Posons

$$\gamma_2 - x\gamma_1 = \beta_2 \wedge \beta_3, \quad \beta_2 = \alpha_2 + i\alpha_5, \quad \beta_3 = \alpha_3 + i\alpha_4 \quad \text{où}$$

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in E \quad \text{et} \quad \alpha_6 = \frac{\alpha + b\alpha_1}{c}.$$

Nous obtenons l'expression

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 - \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

et  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  est une base de  $E$  car  $\gamma_2 - b\gamma_1$  ( $= \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5$ ) est de rang 4.

Remarquons que:

$$\omega = \frac{1}{2}(\alpha_1 - i\alpha_6) \wedge (\alpha_2 + i\alpha_5) \wedge (\alpha_3 + i\alpha_4) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + i\alpha_6) \wedge (\alpha_2 - i\alpha_5) \wedge (\alpha_3 - i\alpha_4)$$

donc  $\omega$  ne peut être mis sous la forme  $(1)_a$  compte tenu de la remarque (B 1.5.a).

2. On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 2. — *L'ensemble  $\Sigma_{6,6}^3$  est constitué de trois orbites.*

- 1) Deux orbites ouvertes correspondant aux modèles  $(1)_a$  et  $(1)_b$ .
- 2) Une orbite de codimension 1 correspondant au modèle (2).

REMARQUES. — 1) Tout  $\omega$  élément de  $\Sigma_{6,6}^3$  tel que  $\omega_C$  est de longueur 3, est aussi de longueur 3.

2) Soit  $\omega$  de  $B$ -longueur 4. Dans  $\wedge^3 E$  on peut aussi l'écrire

$$\omega = -(\alpha_5 - \alpha_2) \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 + (\alpha_5 + \alpha_2) \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 + (\alpha_1 + \alpha_6) \wedge \alpha_5 \wedge (\alpha_3 - \alpha_4)$$

$\omega$  est donc de longueur 3 et les supports des trivecteurs décomposables qui interviennent dans l'expression donnée sont deux à deux en position de somme directe.

3) La précédente remarque montre que la longueur et la  $B$ -longueur ne sont conservées par complexification.

4) Pour  $n > 6$  il est clair que la proposition 1 est conservée. Les conclusions de la proposition 2 sont remplacées par les suivantes:

1. Deux orbites ouvertes dans  $\Sigma_{n,6}^3$  correspondant aux modèles  $(1)_a$  et  $(1)_b$ .

2. Une orbite de codimension 1 dans  $\Sigma_{n,6}^3$ , c'est à dire de dimension  $19 + 6(n-6)$ .


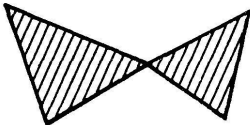
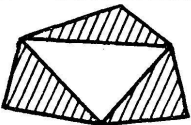
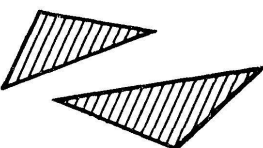
### 3. RÉCAPITULATION

3.1. — On peut remplacer la conjecture de J. Martinet [4] (page 113) par la suivante :

Soient  $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$  et  $\omega = \sum_{j=1}^k \omega'_j$  deux  $B$ -expressions minimales de  $\omega$  ; les collections  $F$  et  $F'$  de sous-espaces  $F_i$  et  $F'_j$ , support respectif de  $\omega_i$  et  $\omega'_j$  sont égales dans  $E$ , c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme  $g$  de  $E$  tel que, pour tout  $i$  il existe  $j$  avec  $g(F_i) = F'_j$ .

3.2. — Les tableaux suivants résument les résultats relatifs aux trajectoires de  $Gl_6(k)$  dans  $\Lambda^3 E_6$ , espace vectoriel de dimension 20 sur  $k$  ;

$$k = \mathbb{C}$$

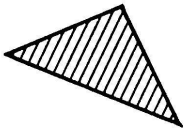
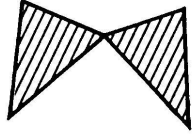
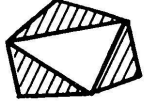
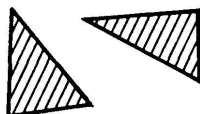
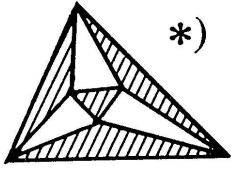
Rang	Longueur	Modèle	Dimension de la trajectoire
0	0		0
3	1		10
5	2		15
6	3		19
	2		20

1) Les sommets des triangles représentent des vecteurs de  $E$  linéairement indépendant.

2) Chaque triangle représente un trivecteur décomposable de support le sous-espace engendré par les trois sommets.

3) Chaque figure représente le trivecteur somme des trivecteurs décomposables représentés par chacun des triangles.

$$k = \mathbb{R}$$

Rang	Longueur	B-Longueur	Modèle	Dimension de la trajectoire
0	0	0		0
3	1	1		10
5	2	2		15
6	3	3		19
	2	2		20
	3	4	 *)	20

\*) Dans ce cas les coefficients attribués aux trivecteurs décomposables ne sont pas indifférents.

Il est évident que le rang, la longueur, la B-longueur sont des invariants très grossiers. Ils ne suffiront plus à distinguer les trajectoires lorsque  $n > 6$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODBILLON, C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [2] GREUB, W. H. *Multilinear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [3] LIBERMANN, P. Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée, *Bull. Ac. Roy. Belg. Cl. Sc.* (5), 39, 1953, pp. 846-850.
- [4] MARTINET, J. Sur les singularités des formes différentielles, *Annales de l'Institut Fournier*, Tome XX, Fascicule 1, 1970, pp.95-178.