II. Caractérisation des anneaux Euclidiens DONT LE STATHME POSSÈDE LES PROPRIÉTÉS DE LA VALEUR ABSOLUE SUR Z

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

$\varphi(a) = \varphi(xq)$ dans le cas où ε_0 n'est pas nul. Cette égalité est encore vraie lorsque $\varepsilon_0 = 0$.

Mais, de façon analogue, on peut écrire: $xq = \varepsilon_1 x + x^2 q'$ et comme ci-dessus on en déduit que $\varphi(xq) = \varphi(x^2 q')$. On démontre, ainsi, par récurrence, que $\varphi(a) = \varphi(\varepsilon_n x^n) = \varphi(x^n)$.

Proposition 5: Soit (A, φ) un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division et tel que A ne soit pas un corps. Alors A s'identifie à un anneau de polynomes $K[X]$ sur un corps et son stathme φ à une fonction de $K[X]^*$ dans $\mathbf{N}$ du type $\omega \circ d$, où ω est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et d la fonction degré sur $K[X]$. Réciproquement $(K[X], \omega \circ d)$, où ω et d sont définis comme ci-dessus, est un anneau Euclidien pour lequel il y a unicité de la division.

La partie directe est une interprétation de la proposition 4). La réciproque est évidente.

II. Caractérisation des anneaux Euclidiens dont le stathme possède les propriétés de la valeur absolue sur $\mathbf{Z}$

Définition 1: On dira que l'anneau Euclidien (A, φ) vérifie la propriété (H) si A n'est pas un corps et si le stathme φ vérifie:

1) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

2) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* l'égalité $\varphi(x) = \varphi(y)$ équivaut à x et y sont des éléments associés.

3) Pour tout couple d'éléments x et y de A^* tels que $x + y \neq 0$ $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.

On se propose de prouver que si (A, φ) vérifie (H), il est alors isomorphe à $(\mathbf{Z}, |\ |)$ en un sens qui sera précisé plus loin.

Remarque 1: Un anneau Euclidien dont le stathme est constant est un corps. Cette remarque jointe au fait que $\varphi(1)^2 = \varphi(1)$ lorsque (A, φ) vérifie (H), montre que dans ce cas $\varphi(1) = 1$. On peut alors prolonger φ à A en posant $\varphi(0) = 0$. On pourra donc considérer φ comme une « norme » sur A.

Proposition 1: Soit (A, φ) un anneau Euclidien vérifiant (H). L'application canonique de $\mathbf{Z}$ dans A est une injection.

Supposons la caractéristique de A égale à $p \neq 0$. Pour tout élément de A^* différent de -1 et désigné par x on a les relations:

$$(\varphi(1+x))^{p^n} = \varphi(1+x^{p^n}) \leqslant 1 + \varphi(x)^{p^n}$$

pour tout entier n.

Ces relations sont obtenues à l'aide de 1) et 3) Déf. 1 et résultent de ce que p, étant un nombre premier, divise les coefficients binomiaux C_p^k.

De l'inégalité $\varphi(1+x) \leqslant (1+\varphi(x)^{p^n})^{\frac{1}{p^n}}$, on déduit par passage à la limite $\varphi(1+x) \leqslant \varphi(x)$. Il en résulte que pour tout élément y de A^* et distinct de -1 et 1 on a $\varphi(y) \leqslant \varphi(1-y) \leqslant \varphi(y)$ et par suite $\varphi(y) = \varphi(1-y)$.

D'après Déf. 1, 2), il existe ε élément de $U(A)$ tel que $1 - y = \varepsilon y$. Alors A serait un corps, ce qui est impossible et $p = 0$.

Remarque 2: Comme dans I, l'hypothèse « A n'est pas un corps » entraîne l'existence d'un plus petit élément $\varphi(x_1)$ dans $\varphi(B_1)$ où B_1 est l'ensemble des éléments a de A^* tels que $\varphi(a) > 1$. Alors pour tout entier n, il existe un élément x de A^* tel que $\varphi(x) > n$. Il suffit de remarquer que

$$\varphi({x_1}^k) = (\varphi(x_1))^k.$$

Par suite B_n, ensemble des éléments de A^* tels que $\varphi(x) > n$, est tel que $\varphi(B_n)$ possède un plus petit élément $\varphi(x_n)$. On posera $x_0 = 1$.

Lemme: Soit (A, φ) un anneau Euclidien vérifiant (H) et soit x un élément de A^* non inversible. Si pour tout élément ε de $U(A)$ on a $\varphi(x) \leqslant \varphi(1+\varepsilon x)$ alors: $\varphi(x) = 2$ et x est somme de deux unités de A.

On peut déjà remarquer que $1 + \varepsilon x$ n'est pas nul, x n'appartenant pas à $U(A)$. On a d'autre part les inégalités: $\varphi(x) \leqslant \varphi(1+\varepsilon x) \leqslant 1 + \varphi(x)$.

Or x n'étant pas une unité, on ne peut avoir $\varphi(x) = \varphi(1+\varepsilon x)$, cette égalité entraînant d'après Déf. 1, 2, l'existence d'un élément η de $U(A)$ tel que $\eta x = 1 + \varepsilon x$. On obtient donc, pour tout unité ε l'égalité

$$\varphi(1+\varepsilon x) = 1 + \varphi(x).$$

Il en résulte que $\varphi(1+x) = \varphi(1-x)$, et par suite $1 + x = \varepsilon(1-x)$ où ε appartient à $U(A)$. On en déduit: $x(1+\varepsilon) = \varepsilon - 1$, mais ε étant différent de 1 car $2x \neq 0$ d'après la proposition 1, cette égalité entraîne: $1 < \varphi(x) \leqslant \varphi(\varepsilon - 1) \leqslant 2$. Ceci prouve que $\varphi(x) = 2$. D'autre part,

$\varphi(x)\varphi(1+\varepsilon) = \varphi(\varepsilon - 1) \leqslant 2$ entraîne: $1+\varepsilon$ appartient à $U(A)$ et par suite $x = (1+\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon)$ est une somme de deux unités.

Proposition 2: Lorsque (A, φ) est un anneau Euclidien vérifiant (H), la famille (x_n) définie dans la remarque 2 possède les propriétés suivantes: Pour tout entier n, x_n est une somme de $n+1$ unités et $\varphi(x_n) = n+1$.

La preuve se fait par récurrence. Supposons que pour toute unité ε de A on ait $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(1+\varepsilon x_1)$, le lemme montre que dans ce cas x_1 est somme de deux unités et que $\varphi(x_1) = 2$. Si, par contre, il existe une unité ε telle que $\varphi(1+\varepsilon x_1) < \varphi(x_1)$, la définition de x_1 montre que $1+\varepsilon x_1$ est une unité. Alors x_1 est somme de deux unités α et β et de plus $1 < \varphi(x_1) \leqslant 2$ entraîne $\varphi(x_1) = 2$.

Supposons maintenant que pour $n \geqslant 2$ on ait pour tout entier $p \leqslant n$: x_p est somme de $p+1$ unités et $\varphi(x_p) = p+1$. Par division Euclidienne on obtient: $1 = x_{n+1}q + r$ où $\varphi(r) < \varphi(x_{n+1})$. En effet r ne peut être nul puisque x_{n+1} n'est pas une unité. On peut, d'autre part, supposer que r est différent de 1 et que q est une unité. En effet, il existe une unité ε telle que $\varphi(1+\varepsilon x_{n+1})$ soit strictement inférieur à $\varphi(x_{n+1})$, le lemme entraînant dans le cas contraire $\varphi(x_{n+1}) = 2$ en contradiction avec $\varphi(x_{n+1}) > n+1$. Considérons l'égalité $1 = x_{n+1}(-\varepsilon) + (1+\varepsilon x_{n+1})$; ayant $\varphi(1+\varepsilon x_{n+1}) < \varphi(x_{n+1})$, la définition de x_{n+1} montre que $\varphi(r) \leqslant n+1$ où $r = 1+\varepsilon x_{n+1}$. D'autre part $1 - r = -\varepsilon x_{n+1}$ entraîne: $n+1 < \varphi(x_{n+1}) \leqslant n+2$ et alors $\varphi(x_{n+1}) = n+2$. Si on avait $\varphi(r) < n+1$ on aurait $\varphi(x_{n+1}) \leqslant 1 + \varphi(r) < n+2$. Ceci prouve que $\varphi(r) = n+1 = \varphi(x_n)$, d'où r est somme de $n+1$ unités, et, par suite, x_{n+1} est une somme de $n+2$ unités.

Corrollaire: Tout élément non nul d'un anneau Euclidien vérifiant (H) est une somme d'unités.

Proposition 3: Dans tout anneau Euclidien (A, φ) vérifiant (H), il existe un entier rationnel p tel que $\varphi(p) > 1$.

La preuve, comme celle de la proposition suivante, utilise la technique de [2] Ch. 6, Par. 6. Ceci provient du fait que l'on peut considérer φ comme une « norme ».

Supposons que pour tout entier $n \neq 0$ on ait $\varphi(n) = 1$. Pour tout couple d'éléments x et y de A l'inégalité $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ entraîne $\varphi(x+y) \leqslant 2\,\mathrm{Sup}(\varphi(x), \varphi(y))$. Soit s un entier non nul et posons $\Psi = \varphi^s$, les propriétés de φ entraînent: $\Psi(x)\Psi(y) = \Psi(xy)$ et

$\Psi(x+y) \leqslant 2^s \operatorname{Sup}(\Psi(x), \Psi(y))$ pour tout couple (x, y) d'éléments de A. On peut alors utiliser une partie de la Prop. 2 de [2], qui montre que pour $n = 2^r - 1$, on a: $\Psi(x+y)^n \leqslant C^r(\Psi(x) + \Psi(y))^n$ où $C = 2^s$. On en déduit, par passage à la limite dans l'inégalité $\Psi(x+y) \leqslant C^{\frac{r}{n}}(\Psi(x) + \Psi(y))$, que $\Psi(x+y) \leqslant \Psi(x) + \Psi(y)$. Alors $\varphi(x+y) \leqslant (\varphi^s(x) + \varphi^s(y))^{\frac{1}{s}}$ donne par passage à la limite: $\varphi(x+y) \leqslant \operatorname{Sup}(\varphi(x), \varphi(y))$. La partie I montre qu'alors A est isomorphe à un anneau de polynomes $K[X]$, ce qui est impossible puisque X serait d'après le corollaire une somme d'unités.

Proposition 4: La restriction à $\mathbf{Z}$ du stathme φ d'un anneau Euclidien vérifiant (H) est la valeur absolue $| \, |$ sur $\mathbf{Z}$. Il en résulte que tout élément x de A peut s'écrire $x = n\varepsilon$ où n est un entier rationnel et ε une unité.

La preuve s'inspire de [2] Prop. 4, Par. 6, N° 3. Soient a et b des entiers non nuls et différents de 1 et soit g l'application de $\mathbf{Z}^* - \{1\}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\operatorname{Log}(\varphi(x))}{\operatorname{Log}|x|}$. Désignons, pour $n \geqslant 2$, la partie entière de $n\dfrac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b}$ par $q(n)$. C'est le plus petit entier m tel que $b^m \leqslant a^n < b^{m+1}$ et il satisfait

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q(n)}{n} = \frac{\operatorname{Log}(a)}{\operatorname{Log}(b)} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} q(n) = +\infty.$$

On sait de plus que $a^n = \alpha_0 + \alpha_1 b + \ldots + \alpha_{q(n)} b^{q(n)}$ où les α_i sont des entiers satisfaisant: $0 \leqslant \alpha_i < b$. En utilisant les propriétés de φ, on obtient: $\varphi(a)^n \leqslant b(1 + \varphi(b) + \ldots + \varphi(b)^{q(n)})$. Dans ces conditions on ne peut avoir $\varphi(b) = 1$; en effet $\varphi(b) = 1$ donne $\varphi(a)^n \leqslant (q(n) + 1)b$ ou encore $\operatorname{Log}(\varphi(a)) \leqslant \dfrac{\operatorname{Log}[(q(n)+1)b].}{n}$ Cette dernière inégalité, entraîne alors par passage à la limite, $\varphi(a) = 1$ pour tout élément de $\mathbf{Z}^*$ distinct de 1, ce qui contredit la proposition 3. On peut donc écrire:

$$\varphi(a)^n \leqslant \frac{b\left(1 - \varphi(b)^{-q(n)-1}\right)}{-1 + \varphi(b)} \varphi(b)^{q(n)+1}$$

où encore:

$$n \operatorname{Log}(\varphi(a)) \leqslant \operatorname{Log}\left(b(\varphi(b) - 1)^{-1}\left(1 - \varphi(b)^{-q(n)-1}\right)\right) + (q(n)+1)\left(\log(\varphi(b))\right).$$

On en déduit que

$$g(a) \leqslant \gamma(n) + \frac{q(n)+1}{n} \cdot \frac{\operatorname{Log}(\varphi(b))}{\operatorname{Log}(a)}$$

où $\gamma(n)$ est une fonction qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en résulte, par passage à la limite, que $g(a) \leqslant g(b)$ et donc $g(a) = g(b)$. Soit $s = g(2)$, alors, pour tout entier a non nul et distinct de 1, $g(a) = s$ entraîne: $\varphi(a) = a^s$. Cette formule se prolonge à $\mathbf{Z}$ par $\varphi(a) = |a|^s$. Puisque, d'après la proposition 3, il existe un entier p tel que $\varphi(p) < 1$, on a forcément $s > 0$. D'autre part $\varphi(2) \leqslant 2$ entraîne $2^s \leqslant 2$, ce qui montre que $s \leqslant 1$. L'hypothèse $s < 1$ entraîne $2^s < 2$ et d'autre part $\varphi(2) = 2^s$ est un entier nous montre qu'alors $2^s = 0$ ou $2^s = 1$ ce qui est absurde. Il en résulte que $s = 1$ et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 5: Un anneau Euclidien vérifiant (H) ne possède pas d'unité telle que $\varepsilon^2 = -1$.

Soit ε une unité telle que $\varepsilon^2 = -1$. On a alors la suite d'égalités: $\varphi(1+\varepsilon)^2 = \varphi((1+\varepsilon)^2) = \varphi(2\varepsilon) = \varphi(2) = 2$ qui conduit à la contradiction $\varphi(1+\varepsilon)^2$ est un entier égal à 2.

PROPOSITION 6: L'ensemble des unités d'un anneau Euclidien vérifiant (H) est réduit à $\{-1, 1\}$.

Soit ε une unité de A autre que 1 et -1. Alors $1+\varepsilon$ ne peut être une unité.

Supposons que ce ne soit pas le cas et considérons $1-\varepsilon$. De $\varphi(1-\varepsilon) \leqslant 2$ on déduit, compte tenu de la proposition 4, que $1-\varepsilon = u$ ou $1-\varepsilon = 2u$ où u est une unité de A. Soit v l'unité égale à $1+\varepsilon$. Si l'on a $1-\varepsilon = 2u$, on obtient $2(1-u) = v$ et alors $2\varphi(1-u) = 1$ est absurde. Si l'on a $1-\varepsilon = u$, on obtient $4\varepsilon = (1+\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^2 = v^2 - u^2$ et alors on a $4 = \varphi(4\varepsilon) = \varphi(v^2 - u^2) < 2$ qui est absurde. Donc $1+\varepsilon$ n'est pas une unité, et, puisque $\varphi(1+\varepsilon) \leqslant 2$, on en déduit $\varphi(1+\varepsilon) = 2$. La proposition 4 nous montre qu'alors $1+\varepsilon = 2u$ où u est une unité. D'autre part $\varepsilon^2 \neq 1$ entraîne $\varepsilon^4 \neq 1$ d'après la proposition 5.

Soit η l'unité égale à $-\varepsilon^2$, elle vérifie $\eta^2 \neq 1$ et le raisonnement précédent nous montre que $1+\eta = 2w$ et $1-\varepsilon = 2v$ où v et w sont des unités de A.

La relation $1+\eta = (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)$ entraîne alors $2uv = w$ ou encore $2 = \varphi(uv) = \varphi(w) = 1$ ce qui est absurde.

DÉFINITIONS 2: Soient (A, φ) et (A', φ') deux anneaux Euclidiens. Un homomorphisme h de l'anneau A dans l'anneau A' est dit Euclidien si $\varphi' oh = \varphi$. Deux anneaux Euclidiens seront dits isomorphes s'il existe un homomorphisme d'anneaux Euclidiens de l'un dans l'autre qui soit un isomorphisme d'anneaux.

THÉORÈME: Un anneau Euclidien vérifiant (H) est canoniquement isomorphe à $(\mathbf{Z}, | \ |)$.

L'injection canonique de $\mathbf{Z}$ dans A est une surjection puisque, les unités de A étant 1 ou -1, la proposition 4 nous montre que tout élément de A peut s'écrire $x = n . 1$ où n est un entier relatif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N., Eléments de Mathématiques, Livre II, Algèbre, Chapitres 6 et 7. Hermann.

[2] —— Eléments de Mathématiques, XXX, Algèbre Commutative, Chapitres 5 et 6. Hermann.

[3] SAMUEL, P., About Euclidian Rings, *Journal of Algebra*. Vol. 19, n° 2, October 1971.

[4] ZARISKI and SAMUEL, Commutative Algebra. D. Van Nostrand Company.

(Reçu le 29 mai 1972)

Gabriel Picavet
Département de Mathématiques Pures
Complexe Scientifique Universitaire des Cézaux
Université de Clermont
F-63-Clermont-Ferrand