

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN  
DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS  
BORNÉES

**Kapitel:** §1. Préliminaires sur les formes différentielles extérieures

**Autor:** Jambon, M.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45380>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Martinelli généralisée, mais le noyau n'est pas holomorphe (contrairement au noyau de Cauchy pour  $n = 1$ ). Un théorème d'homotopie (§ 3) permet de nous ramener à un noyau dont certains termes sont holomorphes; pour obtenir ce dernier, nous devons prouver l'existence d'une fonction  $g$  convenable (th. 5, ch. II). Après quoi, on obtient assez facilement les résultats cherchés.

Je me suis inspiré pour ce travail de l'article de Ingo-Lieb [1], mais j'ai été amené à remanier profondément certaines notations et démonstrations (notamment aux § 2 et 5) dans un but de simplification.

### § 1. PRÉLIMINAIRES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES

$E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbf{C}$ .

#### 1. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1.

*1.1. Définition.* Une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$ , est une application de  $\Omega$  dans l'espace vectoriel  $E^*$  des formes complexes  $\mathbf{R}$ -linéaires sur  $E$ .  $\forall x \in \Omega$ ,  $\omega(x)$  est une forme  $\mathbf{R}$ -linéaire sur  $E$  à valeur dans  $\mathbf{C}$ .

*Lemme 1.1.* Toute forme complexe  $\mathbf{R}$ -linéaire sur  $E$  est somme d'une forme antilinéaire et d'une forme  $\mathbf{C}$ -linéaire et cela de façon unique:

$$l(z) = \frac{1}{2} [l(z) - i l(iz)] + \frac{1}{2} [l(z) + i l(iz)].$$

*Exemple.* Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ ,

$$\forall x \in \Omega, df(x) = \partial f(x) + \bar{\partial} f(x) \quad \text{ou} \quad df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

$\partial f(x)$  désigne la partie  $\mathbf{C}$ -linéaire de  $df(x)$ .

$\bar{\partial} f(x)$  désigne la partie antilinéaire de  $df(x)$ .

*1.2. Ecriture dans une base.* Si  $E$  est muni d'une base,  $E \simeq \mathbf{C}^n$ ,

$$x \in \mathbf{C}^n: x = (x_1, \dots, x_n).$$

*Définition.*  $dx_v$ , respectivement  $d\bar{x}_v$ , désigne la forme  $\mathbf{C}$ -linéaire, respectivement antilinéaire, qui à  $x$  fait correspondre  $x_v$ , respectivement  $\bar{x}_v$ .

Toute forme différentielle de degré 1 sur  $\Omega$  s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu}(x) dx_{\mu} + \sum \omega'_{\mu}(x) d\bar{x}_{\mu}.$$

Par exemple,

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_v} dx_v, \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_v} d\bar{x}_v.$$

## 2. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE TYPE $(p, q)$ .

2.1. *Définition.*  $\binom{p, q}{\wedge} E^*$  est l'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  engendré par l'ensemble des produits extérieurs de  $p$  formes  $\mathbf{C}$ -linéaires et  $q$  formes antilinéaires.

C'est le sous-espace vectoriel de l'espace des  $(p+q)$   $\mathbf{R}$ -linéaires formes alternées qui vérifient  $f(\lambda X_1, \dots, \lambda X_{p+q}) = \lambda^p \bar{\lambda}^q f(X_1 \dots X_{p+q})$ .

Remarques:  $p \leq n, q \leq n$  ( $n = \dim E$ ).

2.2. Une forme différentielle de type  $(p, q)$ , de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) sur  $\Omega$  ouvert de  $E$  est une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\Omega$  dans  $\binom{p, q}{\wedge} E^*$ . On appellera  $\mathcal{C}_{p, q}^k(\Omega)$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  de ces formes.

2.3. *Représentation dans une base.* D'après (1.2), si  $\omega \in \mathcal{C}_{p, q}^k(\Omega)$ ,  $x \in \Omega$ , on a

$$\omega(x) = \sum_{IJ} \omega_{IJ}(x) dx_I \wedge d\bar{x}_J,$$

où  $dx_I = dx_{i_1} \dots dx_{i_p}, \quad i_1 < \dots < i_p,$

$d\bar{x}_J = d\bar{x}_{j_1} \dots d\bar{x}_{j_q}, \quad j_1 < \dots < j_q,$

$\omega_{IJ}(x)$  est une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\Omega$  dans  $\mathbf{C}$ .

## 3. DOUBLE FORME DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE.

( $E, F$  sont des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbf{C}$ ).

3.1. Soit  $W$  un ouvert de  $E \times F$ , une double forme différentielle de type  $(p, q; r, s)$  de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) sur  $W$  est une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $W$  dans  $\binom{p, q}{\wedge} E^* \otimes \binom{r, s}{\wedge} F^*$ .

On appellera  $\mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(W)$  l'espace vectoriel ainsi défini.

Si on note  $(x, y)$  les éléments de  $W$ , on définit pour  $\omega \in \mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(\Omega)$   $\deg_x \omega = p + q$ ,  $\deg_y \omega = r + s$ .

### 3.2. Représentation dans une base

$$\omega(x, y) = \sum_{IJKL} \omega_{IJKL}(x, y) dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

avec des notations similaires à celles du § 0.2.3 et par définition

$$dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L = (dx_I \wedge d\bar{x}_J) \otimes (dy_K \wedge d\bar{y}_L).$$

### 3.3. Produit extérieur de formes doubles.

Soient  $u \in \mathcal{C}_{p,q;r,s}^k(W)$ ,  $v \in \mathcal{C}_{p',q';r',s'}^k(W)$ .

On définit  $u \wedge v$  comme un élément de  $\mathcal{C}_{p+p',q+q';r+r',s+s'}^k(W)$  par

$$\begin{aligned} u \wedge v(x, y) [X_1, \dots, X_{p+q+p'+q'}, Y_1, \dots, Y_{r+s+r'+s'}] \\ = \sum_{I,J,K,L} \varepsilon_{IJ} \varepsilon_{KL} u(x, y) [X_I, Y_K] v(x, y) [X_J, Y_L], \end{aligned}$$

où les notations ont le sens suivant:

$$\begin{cases} I = \{i_1 < \dots < i_{p+q}\} \\ J = \{j_1 < \dots < j_{p'+q'}\} \\ IJ = \{i_1, \dots, i_{p+q}, j_1, \dots, j_{p'+q'}\} \end{cases} \text{ est une permutation de } \{1, \dots, p+q+p'+q'\},$$

$$\begin{cases} K = \{k_1 < \dots < k_{r+s}\} \\ L = \{l_1 < \dots < l_{r'+s'}\} \\ KL = \{k_1, \dots, k_{r+s}, l_1, \dots, l_{r'+s'}\} \end{cases} \text{ est une permutation de } \{1, \dots, r+s+r'+s'\},$$

$X_I$  signifie  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_{p+q}})$ , de même  $Y_K$ ,  $X_J$ ,  $Y_L$ .

*Propriétés.*  $u \wedge v = (-1)^{[\deg_x u \cdot \deg_x v + \deg_y u \cdot \deg_y v]} v \wedge u$ .

Ainsi  $dx_i \cdot dy_j = dx_i \wedge dy_j$ . Mais  $dx_i \wedge dy_j = dy_j \wedge dx_i$ .

Le produit extérieur est évidemment distributif par rapport à l'addition et associatif.

4. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE.

4.1.  $\omega \in \mathcal{C}_{(p,q;r,s)}^k(W)$ ,  $k \geq 1$ .

$\partial_x \omega$  est un élément de  $\mathcal{C}_{(p+1,q;r,s)}^{k-1}(W)$  défini par

$$\begin{aligned} & [\partial_x \omega(x, y)] [X_1, \dots, X_{p+q+1}, Y_1, \dots, Y_{p+s}] \\ &= \sum_{k=1}^{p+q+1} (-1)^{k-1} \partial_x \{ \omega(x, y) [X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{p+1}, \\ & \qquad \qquad \qquad Y_1, \dots, Y_{p+s}] \} [X_k]. \end{aligned}$$

Définitions similaires pour  $\bar{\partial}_x, \partial_y, \bar{\partial}_y$ .

4.2. Propriétés  $\partial_x \partial_x \omega = 0, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_x \omega = 0, \partial_x \bar{\partial}_x \omega = -\bar{\partial}_x \partial_x \omega$ .

Les mêmes pour  $y$  et aussi

$$\bar{\partial}_x \bar{\partial}_y = \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x \dots \partial_x (\alpha \wedge \beta) = (\partial_x \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \partial_x \beta \dots$$

5. NORME SUR  $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$ .

Pour chaque  $(x, y) \in W$  on définit

$$|\omega(x, y)| = \frac{1}{(p+q)!(r+s)!} \sup_{\substack{|X_i| \leq 1 \\ |Y_i| \leq 1}} |\omega(x, y) [X_1 \dots X_{p+q}, Y_1 \dots Y_{r+s}]|$$

Si  $\sup_{(x,y) \in W} |\omega(x, y)| < \infty$ ,  $\omega$  est dite *bornée* et on définit  $|\omega| = \sup_{(x,y) \in W} |\omega(x, y)|$ . L'ensemble des formes bornées est noté  $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$ .

On obtient une norme sur  $\mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$ . Cette norme munit

$\bigoplus_{(p,q;r,s)} \mathcal{BC}_{(p,q;r,s)}^k(W)$  d'une structure d'Algèbre normée car

$$|\alpha \wedge \beta| \leq |\alpha| |\beta|.$$