Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: §3. Une formule d'homotopie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \varepsilon_\sigma \underset{\substack{\sigma(2\nu)=j_\nu \\ \sigma(2\nu)=i_\nu}}{} \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar\partial_{\xi_\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right](X_{\sigma(2\nu)}).$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-**C**-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar\partial_x$ et $\bar\partial_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \; \exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar\partial_{\xi_\nu}\left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right] = 0\,.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1\,.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge} f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge} f_r^*)\,.$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y)[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{f^*}{f}\right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_ν^* sont égales.

Remarque. $D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f}\right)$

car $$\bar{\partial}_y \frac{f^*}{f} = \bar{\partial}_y \left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* + \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*.

Soit maintenant $g^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ vérifiant de plus $\bar{\partial}_y g^* = 0$.

On définit comme pour f^*, $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geqq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q}\,\bar{\partial}_y\, D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \frac{r}{r+q}\,\bar{\partial}_x\, D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q}\, D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous supposons tout d'abord $q \geqq 1$ et $r \geqq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^*/f$ et $G^* = g^*/g$.

D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)\,.$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différentiée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$+ \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_c G^*)$$
$$- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différentiée

$$\bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar{\partial}_x G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$- \ldots$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geqq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

Si $q \geqq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) .$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f))$ (par définition).

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right) + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \dots - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ D_{1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $\quad D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$,

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = -\sum_{k=1}^{r} D_{1,1,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geqq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geqq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_k D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$C(f^*, g^*) =$$

$$\sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).