Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: §3. Une formule d'homotopie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \sum_{\substack{\varepsilon_\sigma \\ \sigma(2\nu)=j_\nu \\ \sigma(2\nu)=i_\nu}} \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\xi_\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right](X_{\sigma(2\nu)}).$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-$\mathbf{C}$-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar{\partial}_{\xi_\nu}\left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right] = 0.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge} f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge} f_r^*).$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y)[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_ν^* sont égales.

Remarque. $$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar\partial_y f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{f}\right)$$

car $$\bar\partial_y \frac{f^*}{f} = \bar\partial_y\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* + \frac{\bar\partial_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*.
Soit maintenant $g^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ vérifiant de plus $\bar\partial_y g^* = 0$.
On définit comme pour f^*, $g(x, y) = g^*(x, y)\,[x-y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geqq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q}\,\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \frac{r}{r+q}\,\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q}\,D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geqq 1$ et $r \geqq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^*/f$ et $G^* = g^*/g$.
D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différentiée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_c G^*)$$
$$- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différentiée

$$\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar\partial_x G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \dots$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geqq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Si $q \geqq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f))$ (par définition).

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\right) + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \ldots - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ D_{1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$,

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^{r} D_{1,1,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geqq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geqq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_k D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$C(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).