

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN  
DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS  
BORNÉES

**Autor:** Jambon, M.

**Kapitel:** Chapitre III UNE FORMULE DE RÉOLUTION POUR L'ÉQUATION  
DE CAUCHY-RIEMANN

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45380>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe  $G$  de  $\mathbf{C}^n$ , avec un bord de classe  $\mathcal{C}^4$ , il existe des doubles formes  $\Omega_{nq}(x, y)$  et  $A_{nq}(x, y) \in \mathcal{C}_{n, n-q-1; 0, q}^1(W)$  et  $C_{n, n-q-2; 0, q}^1(W)$  sur un ouvert  $W$  contenant  $\partial G \times G$ , de telle sorte que ce qui suit est valable :

Si  $\gamma \in \mathcal{C}_{pq}^\infty(\bar{G})$ , alors  $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[ \int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y) - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y).$$

Avec  $\Gamma \in \mathcal{C}_{(0, q-1)}^\infty(G)$ . On rappelle  $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$  pour  $q = 0$ ,  $\Omega_{nq} = 0$  pour  $q > 0$ ,  $\Omega_{nq}$  et  $A_{nq}$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $y$ .

Il est clair que pour les domaines  $G_\nu$  introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉOLUTION  
POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si  $G$  est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et  $g$  une fonction bornée  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $G$ , alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \quad y \in G,$$

satisfait l'équation différentielle  $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$ .

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de  $\bar{\partial}\alpha = \beta$  sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.

§ 7. SOLUTION DE L'ÉQUATION

1.  $G, G_\nu, \varphi, W, \Omega_{nq}, A_{nq}$  sont définis comme dans le chapitre précédent. Soit  $\beta \in \mathcal{C}_{0, q+1}^\infty(G)$  bornée sur  $G$  pour la norme définie au § 1.5.

Nous posons

$$\gamma_\nu(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G_\nu} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y),$$

$$\nu \in \mathbf{N}, 0 \leq q \leq n - 1.$$

Notons qu'on ne peut a priori remplacer  $G_\nu$  par  $G$  car  $\beta$  n'est pas définie sur  $\partial G$ .

2. *Lemme 7.1.* La suite  $\gamma_\nu(y)$  converge localement uniformément sur  $G$  ainsi que toutes ses dérivées vers

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y)$$

et  $\gamma \in \mathcal{C}_{0, q}^\infty(G)$ .

Ceci résulte du fait que  $\beta$  est bornée et du lemme 4.4.

3. Nous nous occupons des propriétés correspondantes pour  $\zeta_\nu$ . Puisqu'on peut différentier sous le signe intégrale à un ordre quelconque, il vient aussitôt:

*Lemme 7.2.* Les formes  $\zeta_\nu$  sont indéfiniment différentiables sur  $G_\nu$ . Le lemme 7.3 n'est pas tout aussi trivial.

*Lemme 7.3.* La suite  $\zeta_\nu$  converge avec toutes ses dérivées localement uniformément sur  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $G' \subset \subset G_{\nu_0}$  et  $\mu > \nu > \nu_0$ .

$$\begin{aligned} \zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y) &= (-1)^{q+1} \int_{\partial G_\mu - \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq} \\ &= (-1)^{q+1} \int_{\partial(G_\mu \setminus G_\nu)} \beta(x) \wedge A_{nq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{q+1} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} d_x (\beta(x) \wedge A_{nq}) \\ &= (-1)^{2[q+1]} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y), \end{aligned}$$

à cause de  $\bar{\partial}\beta = 0$ .

Maintenant d'après la construction de  $g(x, y)$ , la forme  $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$  pour  $x \in G \setminus G_{\nu_0}$  et  $y \in G'$  est bornée, donc avec une constante convenable

$$|\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y)| \leq K \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \bigwedge_{\lambda=1}^n (dx'_\lambda \wedge dx''_\lambda).$$

Cela montre la convergence uniforme sur  $G'$  de la suite  $\zeta_\nu$ . Par différenciation de  $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$  sous le signe intégral par rapport à  $y$ , on constate la convergence uniforme locale de toutes les dérivées de  $\zeta_\nu(y)$ .

4. Nous posons maintenant

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \zeta_\nu(y), \quad \zeta \in \mathcal{C}_{(o, q)}^\infty(G).$$

Nous formulons alors le résultat de ce chapitre.

#### THÉORÈME 9.

Soit  $\beta \in \mathcal{C}_{o, q+1}^\infty(G)$ , telle que  $\beta$  est bornée sur  $G$  et  $\bar{\partial}\beta = 0$ . Alors la  $(0, q)$ -forme  $\alpha = \gamma + \zeta$  satisfait à  $\bar{\partial}\alpha = \beta$ , où l'on rappelle

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y), \\ \zeta(y) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y). \end{aligned}$$

Démonstration. A cause de la pseudo-convexité de  $G$ , il existe  $\eta \in \mathcal{C}_{o, q}^\infty(G)$  telle que  $\bar{\partial}\eta = \beta$ ;  $\eta$  n'a pas besoin d'être borné mais possède d'après le théorème 8 la représentation

$$\eta(y) = \zeta_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[ \int_{x \in \partial G_\nu} \eta(x) \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y \Gamma(y) \right]$$

pour  $y \in G_{\nu_0}$  et  $\nu > \nu_0$ .

De là il s'ensuit

$$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y).$$

Faisons dans cette équation  $v \rightarrow \infty$ ; ainsi, pour  $y \in G_{v_0}$ ,

$$\bar{\partial}\zeta_v(y) + \bar{\partial}\gamma_v(y) \rightarrow \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout  $v_0$ , donc  $\forall y \in G, \bar{\partial}\alpha = \beta$ .

## CHAPITRE IV

### ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

#### § 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de  $\mathcal{BC}_{oq}^\infty(G)$ ; on obtient

$$\forall y \in G, |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \dots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \dots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si  $\bar{\partial}\beta = 0$ ,  $\exists \alpha, K > 0$  tels que  $\bar{\partial}\alpha = \beta$  et  $|\alpha| \leq K|\beta|$ .

#### 2. Majoration de $\gamma$

On avait 
$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$$

On en tire 
$$|\gamma(y)| \leq \frac{|\beta|}{(2\pi)^n} \int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \wedge_{\lambda=1}^n (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$$

Soit  $S$  la sphère de rayon  $R = (\text{diamètre } G)$  et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \wedge_{\lambda=1}^n \frac{(d\bar{z}_\lambda dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leq K |\beta|,$$

où  $K$  est indépendant de  $y$ , d'où  $|\gamma| \leq K|\beta|$ .

La majoration de  $\zeta$  est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction  $g$  du théorème 5.