Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: Chapitre IV ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Faisons dans cette équation $\nu \to \infty$; ainsi, pour $y \in G_{\nu o}$,

$$\bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y) \to \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout ν_o, donc $\forall y \in G$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

Chapitre IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{oq}(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, \ |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \ldots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \ldots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leq K|\beta|$.

2. *Majoration de* γ

On avait $\quad \gamma(y) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$

On en tire $\quad |\gamma(y)| \leq \dfrac{|\beta|}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$

Soit S la sphère de rayon R = (diamètre G) et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \bigwedge_{\lambda=1}^{n} \frac{(d\bar{z}_\lambda \, dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leq K|\beta|,$$

où K est indépendant de y, d'où $|\gamma| \leq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.

§ 9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_\nu \times G_\nu$ indépendamment de ν pour ν supérieur à un ν_o convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |w - y| \leqq b\,, \ |g(x, y)| \geqq K_1 \, |P(x, y)|\,.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leqq b\,, \ g(x, y) = P(x, y)\, e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. *Minoration de* $Re\, P(x, y)$.

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re\, P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] + 0(|x - y|^3)\,.$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G, il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial}\varphi(x)[x - y, x - y] \geqq C\,|x - y|^2\,.$$

On a aussi $\exists\, \delta\,, \ |x - y| \leqq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leqq \dfrac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$

Donc $\forall\, \nu \geqq \nu_o$ (ν_o choisi assez grand)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ \\ \\ |x - y| \leqq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re\, P(x, y) \geqq \frac{C}{2}\,|x - y|^2\,.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geqq 0$ et ce terme disparaît.

3. Minoration de $|\, Im\, P(x, y)\,|$.

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2\, \partial\varphi(x)[x-y] - \partial \otimes \partial\varphi(x)[x-y, x-y],$$

d'où $P(x, y) = 2\, \partial\varphi(y)[x-y] + 0(|x-y|^2)$. Mais $\partial\varphi(y)[x-y] = \frac{1}{2}\{d\varphi(y)[x-y] - i\, d\varphi(y)[i(x-y)]\}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $Im\, P(x, y) = -i\, d\varphi(y)[i(x-y)] + 0(|x-y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y, tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{x \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$ est $x'_1 = 0$, et $i\, H = \{x \mid x''_1 = 0\}$, $x-y = (x'_1, x''_1, \ldots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left|\dfrac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| = |\, d\varphi(y)\,|$,

$$|\, Im\, P(x, y)\,| = \left|\frac{d\varphi}{dx'_1}(y)\right| \times |\, x'_1\,| + 0(|\, x-y\,|^2).$$

$|\, d\varphi(y)\,|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G, donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et v_o, tel que si $v \geqq v_o$

(3) $\quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v,\ |\, Im\, P(x, y)\,| \geqq A\,|\, x''_1\,| - B\,|\, x-y\,|^2.$

4. Minoration de $|\, P(x, y)\,|$ *et* $|\, g(x, y)\,|$.

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma$ dans $\mathbf{R}$, $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta-\gamma) \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geqq \beta - \gamma$,

$$\max\ (\alpha, \beta-\gamma) = \alpha = \alpha\frac{\alpha+(\alpha+\gamma)}{2\alpha+\gamma} \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\gamma}(\alpha+\beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha+\gamma)^2 \leqq \beta(\alpha+\gamma)$, ou $\alpha^2 \leqq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leqq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha+\beta) \leqq (\beta-\gamma)(2\alpha+\gamma)$,

d'où $$\max(\alpha, \beta-\gamma) = \beta - \gamma \geqq \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}(\alpha+\beta).$$

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x,y)| \geqq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2,\ A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $$|P(x,y)| \geqq \frac{\frac{c}{2}}{c+B}\left(\frac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4)\quad \begin{cases} \exists\, k_1 > 0,\ v_o \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v,\ \forall v \geqq v_o,\ |x-y| \leqq \delta\} \Rightarrow |P(x,y)| \\ \qquad\qquad \geqq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists\, k > 0,\ \exists\, v_o \in \mathbf{N},\ \exists\, \eta > 0,$$

$$(4')\quad \begin{cases} \{\forall (x,y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geqq v_o, |x-y| \leqq \eta\} \\ \qquad\qquad \Rightarrow |g(x,y)| \geqq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. Solution bornée de $\bar\partial\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v.

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x,y) \qquad (\S\, 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \binom{n-1}{q} A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Nous devons donc majorer

$$D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_y \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x \frac{g^*}{g}\right)$$

$$= D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \frac{\bar\partial_y f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{f}, \frac{\bar\partial_x f^*}{g}\right),$$

car
$$\bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right) = \frac{\bar\partial_x f^*}{f} + \bar\partial_x\left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* ;$$

le second terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*, de même pour les termes en $\bar\partial_x (f^*/f)$ et $\bar\partial_x (g^*/g)$. D'où, en tenant compte du § 9, 1 et 4 (4'),

$$\exists\, h_1 > 0,\ \exists\, \nu_o \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0 : \nu \geqq \nu_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \text{ et } |x-y| \leqq \eta$$

on a

$$|D_{1,1,q,r-k,k-1}(\qquad)| \leqq \frac{h_1}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{1+2(n-2)}},$$

d'où: $\exists h > 0$, $\exists \nu_o \in \mathbf{N}$, $\exists \eta > 0$,

$$(5)\quad \begin{cases} (x, y) \in (\partial G_\nu \times G_\nu),\ \nu \geqq \nu_0,\ |x-y| \leqq \eta \\ \qquad\qquad \Rightarrow |A_{nq}(x, y)| \leqq \dfrac{h}{(|x-y|^2 + |x''_1|)\,|x-y|^{2n-3}}. \end{cases}$$

et de façon presque évidente

$$\exists\, K_2,\ |x-y| \geqq \eta,\ \nu \geqq \nu_0,\ \forall (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu : |A_{nq}(x, y)| \leqq K_2 .$$

Notons bien que toutes les constantes intervenant ne dépendent pas de y.

On décompose alors l'intégrale

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n}\left[\int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) + \int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \geq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y)\right];$$

le deuxième terme est majoré par $K|\beta| \times \sup\limits_{\nu \geqq \nu_o} \{\text{Aire } \partial G_\nu\}$.

Pour le premier terme on utilise (5).

$$\left|\int_{\substack{x \in \partial G_\nu \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y)\right| \leqq |\beta|\, h \int_{\substack{|x-y| \leq \eta \\ x \in \partial G_\nu}} \frac{d\sigma}{|x-y|^{2n-3}(|x-y|^2 + |x''_1|)}$$

où $d\sigma$ est l'élément différentiel d'aire sur ∂G_ν.

Il se peut que $\partial G_v \cap |x-y| \leq \eta = \emptyset$ tout est alors terminé, sinon on peut paramétrer $\partial G_v \cap \{|x-y| \leq \eta\}$ par $x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x''_n$ avec les notations du § 9.3.
On pose $r = (x''^2_1 + x'^2_2 + x''^2_2 + \ldots + x''^2_n)^{\frac{1}{2}}$.
Avec une nouvelle constante l (toujours indépendante de y) on a

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq l\,|\beta| \int_{r \leq \eta} \frac{dx''_1\, dx'_2\, dx''_2 \ldots dx''_n}{r^{2n-3}(r^2 + |x''_1|)}.$$

On passe en coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^{2n-1}$; il vient avec une autre constante M

$$\left| \int_{\substack{x \in \partial G_v \\ |x-y| \leq \eta}} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \right| \leq M\,|\beta| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\eta} \frac{r^{2n-2}\, dr}{r^{2n-3}(r^2 + r\,|\cos\theta|)}\, d\theta.$$

On a $$\int_0^{\eta} \frac{dr}{r + |\cos\theta|} = \mathrm{Log}(\eta + |\cos\theta|) - \mathrm{Log}(|\cos\theta|)$$

et l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Log}\,|\cos\theta|\, d\theta$ est convergente, ce qui permet de conclure:

THÉORÈME 10.

a) *Soit G un domaine strictement pseudo-convexe avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$. Il existe une application linéaire L continue du sous-espace vectoriel des formes $\bar\partial$-fermées de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(p,q+1)}(G)$ dans $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(p,q)}(G)$ telle que si*
$\alpha = L\beta$, $\bar\partial\alpha = \beta$.
La continuité se traduit par $\exists K > 0$, $|\alpha| \leq K|\beta|$.

b) *Il existe une base de voisinage strictement pseudo-convexe G_v de $\bar G$ tels que* a) *soit valable avec la même constante K.*

Pour $p = 0$ la démonstration a été faite.

Pour $p > 0$ il suffit d'écrire

$$\beta = \sum_I \beta_I \wedge dx_I, \text{ où } I = \{i_1 < \ldots < i_p\} \subset \{1, \ldots n\},$$

$\beta_I \in \mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{(o,q+1)}(G)$ et $\bar\partial\beta = 0 \Rightarrow \bar\partial\beta_I = 0$;

le problème est ramené à $p = 0$.

Le b) résulte de ce que tout ce qui a été fait sur les G_ν aurait pu être fait sur $\tilde{G}_\nu = \{ x \mid \varphi(x) < \varepsilon_\nu \}$, $\varepsilon_\nu \searrow 0$, pour ν suffisamment grand, car la condition $G_\nu \subset\subset G$ n'a joué aucun rôle; on a seulement utilisé ∂G_ν voisin de ∂G.

REMARQUE.

On a prouvé l'existence d'un noyau dans le chapitre III; ce noyau dépend de la fonction g et de la forme g^* dont on affirme seulement l'existence dans le chapitre II. Dans le cas particulier où *G est strictement convexe* de bord de classe $\mathscr{C}^3$, la fonction $g(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)\,[x-y]$ et $g^*(x, y) = 2\,\partial\varphi(x)$ conviennent (à cause de la convexité stricte de g), on a alors une formule *constructive* pour l'équation $\bar{\partial}\alpha = \beta$ lorsque $\bar{\partial}\beta = 0$, $(\beta \in \mathscr{C}^\infty_{o,\,q+1}(G))$ et le § 5 (ch. II) serait à supprimer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIEB, I. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf strengpseudokonvexen Gebieten. *Mathematische Annalen 190* (1970), pp. 6-44.

[2] GRAUERT, H. und I. LIEB. Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. *Rice Univ. Studies., Complex Analysis*, 1969.

[3] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[4] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Norstrand, Princeton, 1966.

[5] —— L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. *Acta Mathematica 113* (1965), pp. 91-145.

[6] RAMIREZ DE, A. E. Ein Divisionsproblem und Randintegraldarststellungen in der komplexen Analysis. *Math. Ann. 184* (1970), pp. 172-187.

[7] CHENKIN, G. M. Une représentation intégrale pour des fonctions holomorphes sur un domaine strictement pseudo-convexe et une application (en Russe). *Matem. Sb. 120* (1969), pp. 611-632.

(Reçu le 21 novembre 1972)

M. Jambon
Mathématiques
Faculté des Sciences
F-34 — Montpellier