

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Kapitel: I.2. Plus petit corps cyclotomique contenant une extension ABÉLIENNE
DE DEGRÉ p^r SUR \mathbb{Q}

Autor: Oriat, Bernard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$. Comme d'autre part $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ est cyclique, $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$ et $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)^{((p_i - 1) p_i^{s_i - 1})^*}$ possèdent le même nombre d'éléments. $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$ est donc l'ensemble des puissances $((p_i - 1) p_i^{s_i - 1})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$.

Rappelons que si $r \geq 3$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^r}\right)^*$ est produit direct de $\{-1, 1\}$ et de $T(2^r, 4)$. Si $p_i = 2$, $r_i \geq 3$, posons $a_0 = \theta_i^{-1}(-1)$; $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$ est produit direct de $\{a_0, 1\}$ et de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$ qui est cyclique. Pour tout s_i entre 3 et r_i , $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - s_i}}\right)$ est alors l'ensemble des puissances $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$. C'est aussi l'ensemble des puissances $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$ d'éléments de $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$.

I.2. PLUS PETIT CORPS CYCLOTOMIQUE CONTENANT UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE DEGRÉ p^r SUR Q

PROPOSITION I.1.

Soit r un entier positif, p un nombre premier impair, K une extension abélienne de degré p^r sur Q , $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K . Alors n est de la forme $n = p^s p_1 p_2 \dots p_m$ et vérifie les conditions:

— $0 \leq s \leq r + 1$.

— $s \neq 1$.

— Les p_i sont des nombres premiers distincts et congrus à 1 modulo p .

*) $G^{(n)}$ désigne le sous-groupe de G formé des puissances n^{eme} d'éléments de G .

Le théorème de Kronecker permet d'affirmer qu'il existe n' tel que $\Omega(n')$ contienne K . Soit $n' = p^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$ la décomposition de n' en facteurs premiers et soit S le sous-groupe de $G(n')$ constitué par les K -automorphismes.

1. Montrons que si $p_i \not\equiv 1 (p)$, alors $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$. Il est équivalent de montrer que $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right) \subseteq S$; soit $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$, puisque $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$ est d'ordre $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$, on aura donc: $h^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$ ($1_{\Omega(n')}$ désignant l'identité sur $\Omega(n')$). Si σ est la restriction de h à K , on aura également $\sigma^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_K$. D'autre part $\sigma^{p^r} = 1_K$ puisque K est de degré p^r sur Q . Comme $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$ et p^r sont premiers entre eux, on en déduit que $\sigma = 1_K$ et $h \in S$.

2. Montrons que si $p_i \equiv 1 (p)$, alors $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$. Cela revient à démontrer que $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right) \subseteq S$.

Soit $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$, puisque ce sous-groupe est d'ordre $p_i^{u_i - 1}$, on aura donc $h^{p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$. D'où, σ étant la restriction de h à K , $\sigma^{p_i^{u_i - 1}} = 1_K$. D'autre part $\sigma^{p^r} = 1_K$ pour la même raison que précédemment. Comme $p_i^{u_i - 1}$ et p^r sont premiers entre eux, $\sigma = 1_K$ et $h \in S$.

3. Montrons que $s \leq r + 1$, c'est-à-dire, montrons que si $u \geq r + 2$ alors $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p^{u-r-1}}\right)$.

En effet si $u \geq r + 2$, $T\left(n', \frac{n'}{p^{u-r-1}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{p^u}\right)^{((p-1)p^r)}$. Tout élément $h \in T\left(n', \frac{n'}{p^{u-r-1}}\right)$ est donc une puissance $(p^r)^{\text{ème}}$. Il en est de même de la restriction de h à K qui est l'identité de K , puisque K est de degré p^r sur Q . On a donc $T\left(n', \frac{n'}{p^{u-r-1}}\right) \subseteq S$.

4. Montrons enfin que $s \neq 1$.

Pour cela, montrons que si $u = 1$, alors $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p}\right)$. Si $u = 1$, alors

$T\left(n', \frac{n'}{p}\right)$ a pour ordre $p - 1$ et comme $p - 1$ est premier à p^r , on en déduit
 $T\left(n', \frac{n'}{p}\right) \subseteq S$.

PROPOSITION I.1 bis.

Soit r un entier positif et K une extension abélienne de degré 2^r sur Q , $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K . Alors n est de la forme $n = 2^s p_1 p_2 \dots p_m$ et vérifie la condition

— $0 \leq s \leq r + 2$.

— Les p_i sont des nombres premiers impairs distincts.

La démonstration est analogue à la précédente. Pour montrer que $s \leq r + 2$, on constate que si $u \geq r + 3$ et si $n' = 2^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$, alors

$$T\left(n', \frac{n'}{2^{u-r-2}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{2^u}\right)^{2^r}.$$

I.3. SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES ASSOCIÉE A UNE EXTENSION CYCLIQUE K_r

DÉFINITION:

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r (p premier) sur Q . Pour i entre 1 et r soit K_i l'unique sous-corps de K_r de degré p^i sur Q . Soit $\Omega(n_i)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K_i . On appellera « suite de corps cyclotomiques associée à K_r » la suite des r corps $\Omega(n_i)$.

PROPOSITION I.2.

Soit r un entier positif et p un nombre premier impair. Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q . Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r .

Alors les n_i vérifient les conditions suivantes:

I.2.A. Pour tout i de 1 à r , la décomposition de n_i en facteurs premiers est $n_i = p^{u_i} p_1 \dots p_{m_i}$; la suite $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ est non décroissante. La suite $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$ est non décroissante, éventuellement nulle.