

I.5. Construction d'extensions cycliques K_r de degré p^r sur Q DANS LE CAS OÙ p EST IMPAIR

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ensemble des $\mu(f_j)$, j de 0 à m_r , est un système de générateurs de S_r .

Dans les autres cas, on procède de la même façon: si $u_r = r + 1$, on a $l = 1$, $b_0^{p^r} \in H_r$ et $b_0^{p^{r-1}} \notin H_r$. On place donc b_0 en premier, c'est-à-dire que l'on cherche une base $(f_0, f_1, \dots, f_{m_r})$ de H_r telle que la matrice A de $(f_0, f_1, \dots, f_{m_r})$ par rapport à $(e_0, e_1, e_2 \dots e_{m_r})$ soit triangulaire.

Remarque: S_r n'est pas en général, produit direct des sous-groupes cycliques engendrés par chacun des générateurs obtenus.

I.5. CONSTRUCTION D'EXTENSIONS CYCLIQUES K_r DE DEGRÉ p^r SUR Q DANS LE CAS OÙ p EST IMPAIR

PROPOSITION I.4.

Réciproquement, soient p un nombre premier impair, r un entier positif $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B.

— Si $2 \leq u_r \leq r$, soient des nombres α_0 , vérifiant la condition I.3.A, et α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}$.

— Si $u_r = r + 1$, soient des nombres α_j , pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B et soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{b_0^{p^r}, b_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r\}$.

— Si $u_r = 0$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B et soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}$.

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r . Alors:

K_r est une extension cyclique sur Q , de degré p^r . La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$.

Supposons $2 \leq u_r \leq r$, utilisons à nouveau l'application μ de Z^{m_r+1} sur $G(n_r)$ définie dans la démonstration précédente. Soit H_r le sous-module de Z^{m_r+1} ayant pour base: $(f_0, f_1, \dots, f_{m_r})$ avec $f_1 = p^r e_1$, et $f_j = \alpha_j e_1 + e_j$ pour tout j différent de 1. On a $\mu(H_r) = S_r$ et d'autre part les conditions I.3.A et I.3.B impliquent que:

— $p^{r-l+1} e_0 \in H_r$ et $p^{r-l} e_0 \notin H_r$.

— Si $m_{i-1} < j \leq m_i$ alors $p^{r-i+1}e_j \in H_r$ et $p^{r-i}e_j \notin H_r$.

On en déduit tout d'abord que $(p-1)p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et compte tenu de la condition I.2.B $(p_j-1)e_j \in H_r$ pour $1 \leq j \leq m_r$. Le noyau de μ qui a pour base: $\{(p-1)p^{r-l+1}e_0, (p_1-1)e_1, \dots, (p_{m_r}-1)e_{m_r}\}$ est donc contenu dans H_r .

On a donc $H_r = \mu^{-1}(S_r)$ et $\frac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est isomorphe à $\frac{G(n_r)}{S_r}$.

Le degré de K_r sur Q est donc égal à

$$\text{Card} \left(\frac{G(n_r)}{S_r} \right) = \text{Card} \left(\frac{Z^{m_r+1}}{H_r} \right) = p^r.$$

Comme $p^{r-1}e_1 \notin H_r$, $\frac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est donc un groupe cyclique. K_r est donc cyclique sur Q .

Soient H_i les sous-modules de Z^{m_r+1} ayant pour bases $\{p^i e_1, f_0, f_2, \dots, f_{m_r}\}$, i de 1 à r . Soient S_i les sous-groupes de $G(n_r)$ définis par $S_i = \mu(H_i)$ et K_i les sous-corps de $\Omega(n_r)$ corps fixes de chacun des S_i .

Pour tout i de 1 à r , H_i contient H_r , donc K_i est un sous-corps de K_r . L'indice de H_r dans H_i est p^{r-i} , donc K_i est le sous-corps de K_r de degré p^i sur Q .

On a $p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et $p^{r-l}e_0 \notin H_r$. D'où $b_0^{p^{r-l+1}} \in S_r$ et $b_0^{p^{r-l}} \notin S_r$. Donc $b_0^{(p-1)p^{r-l}} \notin S_r$, $T\left(n_r, \frac{n_r}{p}\right) \notin S_r$ d'où $K_r \not\subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p}\right)$.

De même si $m_{i-1} < j \leq m_i$, on a alors $c_j^{p^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{p^{r-i}} \notin S_r$, et compte tenu du lemme I.1, $c_j \in S_{i-1}$ et $c_j \notin S_i$, c'est-à-dire:

$$K_{i-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right) \quad \text{et} \quad K_i \not\subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right)$$

$(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est donc la suite de corps cyclotomiques associée à K_r .

Dans les cas $u_r = 0$ et $u_r = r + 1$, la démonstration est analogue.

I.6. SYSTÈME DE GÉNÉRATEURS DE S_r . CAS OÙ $p = 2$

Si K_r est une extension de degré 2^r sur Q , cyclique sur Q , on peut de la même façon donner un système de générateurs du sous-groupe S_r de $G(n_r)$.