Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: I.6. Système de générateurs de S_r. Cas où p=2

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

— Si $m_{i-1} < j \leqq m_i$ alors $p^{r-i+1}e_j \in H_r$ et $p^{r-i}e_j \notin H_r$.

On en déduit tout d'abord que $(p-1)\,p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et compte tenu de la condition I.2.B $(p_j-1)\,e_j \in H_r$ pour $1 \leqq j \leqq m_r$. Le noyau de μ qui a pour base: $\{(p-1)\,p^{r-l+1}e_0, (p_1-1)\,e_1, \ldots (p_{m_r}-1)\,e_{m_r}\}$ est donc contenu dans H_r.

On a donc $H_r = \mu^{-1}(S_r)$ et $\dfrac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est isomorphe à $\dfrac{G(n_r)}{S_r}$.

Le degré de K_r sur Q est donc égal à

$$\mathrm{Card}\left(\frac{G(n_r)}{S_r}\right) = \mathrm{Card}\left(\frac{Z^{m_r+1}}{H_r}\right) = p^r.$$

Comme $p^{r-1}e_1 \notin H_r$, $\dfrac{Z^{m_r+1}}{H_r}$ est donc un groupe cyclique. K_r est donc cyclique sur Q.

Soient H_i les sous-modules de Z^{m_r+1} ayant pour bases $\{p^ie_1, f_0, f_2, \ldots f_{m_r}\}$, i de 1 à r. Soient S_i les sous-groupes de $G(n_r)$ définis par $S_i = \mu(H_i)$ et K_i les sous-corps de $\Omega(n_r)$ corps fixes de chacun des S_i.

Pour tout i de 1 à r, H_i contient H_r, donc K_i est un sous-corps de K_r. L'indice de H_r dans H_i est p^{r-i}, donc K_i est le sous-corps de K_r de degré p^i sur Q.

On a $p^{r-l+1}e_0 \in H_r$ et $p^{r-l}e_0 \notin H_r$. D'où $b_0^{p^{r-l+1}} \in S_r$ et $b_0^{p^{r-l}} \notin S_r$. Donc $b_0^{(p-1)p^{r-l}} \notin S_r$, $T\left(n_r, \dfrac{n_r}{p}\right) \nsubseteq S_r$ d'où $K_r \nsubseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p}\right)$.

De même si $m_{i-1} < j \leqq m_i$, on a alors $c_j^{p^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{p^{r-i}} \notin S_r$, et compte tenu du lemme I.1, $c_j \in S_{i-1}$ et $c_j \notin S_i$, c'est-à-dire:

$$K_{i-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right) \quad \text{et} \quad K_i \nsubseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p_j}\right)$$

$(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ est donc la suite de corps cyclotomiques associée à K_r.

Dans les cas $u_r = 0$ et $u_r = r+1$, la démonstration est analogue.

I.6. Système de générateurs de S_r. Cas où $p = 2$

Si K_r est une extension de degré 2^r sur Q, cyclique sur Q, on peut de la même façon donner un système de générateurs du sous-groupe S_r de $G(n_r)$.

On notera comme précédemment c_j un générateur de $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$.

Si $u_r = 0$, $G(n_r)$ est produit direct des sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ j variant de 1 à m_r.

Si $u_r \geqq 2$, a_0 désigne l'élément de $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ tel que $a_0 \equiv -1\ (2^{u_r})$.

Si $u_r = 2$, a_0 engendre $T\left(n_r, \frac{n_r}{4}\right)$ et $G(n_r)$ est produit direct de $T\left(n_r, \frac{n_r}{4}\right)$ et des sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$, j de 1 à m_r.

Si $u_r \geqq 3$, $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ est produit direct de $\{a_0, 1\}$ et de $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}}\right)$.

On notera a_0' un générateur de $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}}\right)$. $G(n_r)$ est alors produit direct des sous-groupes cycliques:

$$\{a_0, 1\}, \quad T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}}\right), \quad \text{et} \quad T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right),$$

j variant de 1 à m_r.

PROPOSITION I.3 *bis*

Soit K_r une extension cyclique de degré 2^r sur Q, et soit $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r.

— *Dans le cas où* $3 \leqq u_r \leqq r + 1$, il existe des nombres α_0, α_0', α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, tels que S_r soit engendré par:

$$\{c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0'} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r\}.$$

α_0 vérifie la condition: $\alpha_0 \equiv 0\ (2^{r-1})$.

α_0' vérifie la condition:

I.3.A bis : $\alpha_0' \equiv 0\ (2^{l-1})$ et $\alpha_0' \not\equiv 0\ (2^l)$.

Les α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifient la condition:

I.3.B bis : Si $m_{i-1} < j \leqq m_i$, alors $\alpha_j \equiv 0\ (2^{i-1})$ et $\alpha_j \not\equiv 0\ (2^i)$.

— *Dans le cas où* $u_r = r + 2$, il existe des nombres α_j, pour $0 \leq j \leq m_r$, tels que S_r soit engendré par: $\{ a_0'^{\alpha_0} a_0, a_0'^{\alpha_j} c_j ; 1 \leq j \leq m_r \}$.

α_0 vérifie la condition: $\alpha_0 \equiv 0\ (2^{r-1})$.

Les α_j, pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifient la condition I.3.B *bis*.

— *Dans le cas où* $u_r = 2$, il existe des nombres α_j, pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B *bis* et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leq j \leq m_r \}$.

— *Dans le cas où* $u_r = 0$, il existe des nombres α_j, pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B *bis* et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leq j \leq m_r \}$.

On démontre tout d'abord le lemme suivant:

LEMME I.2 *bis*

— Dans le cas où $u_r \geq 3$, $a_0'^{2^{r-l+1}} = 1$ et $a_0'^{2^{r-l}} \notin S_r$.

— Dans le cas où $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$.

— Si $m_{i-1} < j \leq m_i$ alors $c_j^{2^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{2^{r-i}} \notin S_r$.

En effet si $u_r \geq 3$, la condition I.2.A *bis* implique $u_r = r - l + 3$. 2^{r-l+1} est donc de l'ordre de a_0 et d'autre part, si $a_0'^{2^{r-l}} \in S_r$, alors:

$$\left(T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}}\right)\right)^{(2^{r-l})} = T\left(n_r, \frac{n_r}{2}\right) \subseteq S_r .$$

D'où $K_r \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2}\right)$ et $\Omega(n_r)$ ne serait pas le plus petit corps cyclotomique contenant K_r. De même si $u_r = 2$ et $a_0 \in S_r$ alors on aurait $K_r \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{4}\right)$.

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration de I.3.

I.7. CONSTRUCTION D'EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ 2^r SUR Q

PROPOSITION I.4 *bis*

Réciproquement, soit r un entier positif et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A *bis* et I.2.B *bis*.

— *Si* $3 \leq u_r \leq r + 1$, soient des nombres: $\alpha_0 \equiv 0\ (2^{r-1})$, α_0', vérifiant I.3.A *bis*, α_j, pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r