

I.7. Construction d'extensions cycliques de degré 2^r sur \mathbb{Q}

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

— Dans le cas où $u_r = r + 2$, il existe des nombres α_j , pour $0 \leq j \leq m_r$, tels que S_r soit engendré par: $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$.

α_0 vérifie la condition: $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$.

Les α_j , pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifient la condition I.3.B bis.

— Dans le cas où $u_r = 2$, il existe des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B bis et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}$.

— Dans le cas où $u_r = 0$, il existe des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant la condition I.3.B bis et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}$.

On démontre tout d'abord le lemme suivant:

LEMME I.2 bis

— Dans le cas où $u_r \geq 3$, $a_0^{2^{r-l+1}} = 1$ et $a_0^{2^{r-l}} \notin S_r$.

— Dans le cas où $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$.

— Si $m_{i-1} < j \leq m_i$ alors $c_j^{2^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{2^{r-i}} \notin S_r$.

En effet si $u_r \geq 3$, la condition I.2.A bis implique $u_r = r - l + 3$. 2^{r-l+1} est donc de l'ordre de a_0 et d'autre part, si $a_0^{2^{r-l}} \in S_r$, alors:

$$\left(T \left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}} \right) \right)^{(2^{r-l})} = T \left(n_r, \frac{n_r}{2} \right) \in S_r.$$

D'où $K_r \subseteq \Omega \left(\frac{n_r}{2} \right)$ et $\Omega(n_r)$ ne serait pas le plus petit corps cyclotomique

contenant K_r . De même si $u_r = 2$ et $a_0 \in S_r$ alors on aurait $K_r \subseteq \Omega \left(\frac{n_r}{4} \right)$.

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration de I.3.

I.7. CONSTRUCTION D'EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ 2^r SUR Q

PROPOSITION I.4 bis

Réciproquement, soit r un entier positif et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis.

— Si $3 \leq u_r \leq r + 1$, soient des nombres: $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$, α_0' , vérifiant I.3.A bis, α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r

le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = r + 2$, soient des nombres $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ et α_j , pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par : $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$.

— Si $u_r = 2$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = 0$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r . Alors :

K_r est une extension cyclique sur Q , de degré 2^r . La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$.

I.8. NOMBRE D'EXTENSIONS ASSOCIÉES A UNE MÊME SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES

PROPOSITION I.5.

Soit p un nombre premier impair et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions K_r de degré p^r sur Q , cycliques sur Q , admettant la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ comme suite de corps cyclotomiques associée est :

— Dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$:

$$\varphi(p^{r-l+1}) \varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 1$, et en posant $m_0 = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$:

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

Si par exemple, $2 \leq u_r \leq r$, on peut remplacer dans le système de générateurs de S_r donné en I.3, $c_1^{\alpha_0} b_0$ par $c_1^{\alpha_0+k_0 p^r} b_0$, $c_1^{\alpha_2} c_2$ par $c_1^{\alpha_2+k_2 p^r} c_2$, ... et choisir ainsi des α_i , compris entre 0 et p^r . Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de α_i sont alors déterminées de façon unique par le