I.7. Construction d'extensions cycliques de degré 2^r sur Q

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

— *Dans le cas où* $u_r = r + 2$, il existe des nombres α_j, pour $0 \leqq j \leqq m_r$, tels que S_r soit engendré par: $\{ a_0'^{\alpha_0} a_0, a_0'^{\alpha_j} c_j; 1 \leqq j \leqq m_r \}$.

α_0 vérifie la condition: $\alpha_0 \equiv 0 \, (2^{r-1})$.

Les α_j, pour $1 \leqq j \leqq m_r$, vérifient la condition I.3.B *bis*.

— *Dans le cas où* $u_r = 2$, il existe des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant la condition I.3.B *bis* et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leqq j \leqq m_r \}$.

— *Dans le cas où* $u_r = 0$, il existe des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant la condition I.3.B *bis* et tels que S_r soit engendré par: $\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leqq j \leqq m_r \}$.

On démontre tout d'abord le lemme suivant:

LEMME I.2 *bis*

— Dans le cas où $u_r \geqq 3$, $a_0'^{2^{r-l+1}} = 1$ et $a_0'^{2^{r-l}} \notin S_r$.

— Dans le cas où $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$.

— Si $m_{i-1} < j \leqq m_i$ alors $c_j^{2^{r-i+1}} \in S_r$ et $c_j^{2^{r-i}} \notin S_r$.

En effet si $u_r \geqq 3$, la condition I.2.A *bis* implique $u_r = r - l + 3$. 2^{r-l+1} est donc de l'ordre de a_0 et d'autre part, si $a_0'^{2^{r-l}} \in S_r$, alors:

$$\left(T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r-2}}\right)\right)^{(2^{r}-l)} = T\left(n_r, \frac{n_r}{2}\right) \subseteq S_r \, .$$

D'où $K_r \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2}\right)$ et $\Omega\,(n_r)$ ne serait pas le plus petit corps cyclotomique contenant K_r. De même si $u_r = 2$ et $a_0 \in S_r$ alors on aurait $K_r \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{4}\right)$.

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration de I.3.

I.7. CONSTRUCTION D'EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ 2^r SUR Q

PROPOSITION I.4 *bis*

Réciproquement, soit r un entier positif et $(\Omega\,(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A *bis* et I.2.B *bis*.

— *Si* $3 \leqq u_r \leqq r + 1$, soient des nombres: $\alpha_0 \equiv 0 \, (2^{r-1})$, α_0', vérifiant I.3.A *bis*, α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r

le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

— *Si* $u_r = r + 2$, soient des nombres $\alpha_0 \equiv 0\,(2^{r-1})$ et α_j, pour $1 \leqq j \leqq m_r$ vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par: $\{ a_0'^{\alpha_0} a_0, a_0'^{\alpha_j} c_j ; 1 \leqq j \leqq m_r \}$.

— *Si* $u_r = 2$, soient des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

— *Si* $u_r = 0$, soient des nombres α_j, pour $2 \leqq j \leqq m_r$, vérifiant I.3.B *bis*. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par:

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j ; 2 \leqq j \leqq m_r \}.$$

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r. Alors: K_r est une extension cyclique sur Q, de degré 2^r. La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$.

I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps cyclotomiques

Proposition I.5.

Soit p un nombre premier impair et $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions K_r de degré p^r sur Q, cycliques sur Q, admettant la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leqq i \leqq r}$ comme suite de corps cyclotomiques associée est:

— *Dans le cas où* $2 \leqq u_r \leqq r$:

$$\varphi(p^{r-l+1})\,\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

— *Dans le cas où* $u_r = r + 1$, et en posant $m_0 = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

— *Dans le cas où* $u_r = 0$:

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i - m_{i-1}}$$

Si par exemple, $2 \leqq u_r \leqq r$, on peut remplacer dans le système de générateurs de S_r donné en I.3, $c_1^{\alpha_0} b_0$ par $c_1^{\alpha_0 + k_0 p^r} b_0$, $c_1^{\alpha_2} c_2$ par $c_1^{\alpha_2 + k_2 p^r} c_2$, ... et choisir ainsi des α_i, compris entre 0 et p^r. Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de α_i sont alors déterminées de façon unique par le