

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Kapitel: I.8. Nombre d'extensions associées a une même suite de corps
cyclotomiques

Autor: Oriat, Bernard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0} a_0', c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = r + 2$, soient des nombres $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ et α_j , pour $1 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par : $\{ a_0^{\alpha_0} a_0, a_0^{\alpha_j} c_j; 1 \leq j \leq m_r \}$.

— Si $u_r = 2$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^{r-1}} a_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

— Si $u_r = 0$, soient des nombres α_j , pour $2 \leq j \leq m_r$, vérifiant I.3.B bis. Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ engendré par :

$$\{ c_1^{2^r}, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r \}.$$

Soit enfin, K_r le sous-corps de $\Omega(n_r)$, corps fixe de S_r . Alors :

K_r est une extension cyclique sur Q , de degré 2^r . La suite de corps cyclotomiques associée à K_r est la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$.

I.8. NOMBRE D'EXTENSIONS ASSOCIÉES A UNE MÊME SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES

PROPOSITION I.5.

Soit p un nombre premier impair et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ une suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A et I.2.B. Le nombre d'extensions K_r de degré p^r sur Q , cycliques sur Q , admettant la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ comme suite de corps cyclotomiques associée est :

— Dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$:

$$\varphi(p^{r-l+1}) \varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 1$, et en posant $m_0 = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$:

$$\varphi(p^r)^{m_1-1} \prod_{2 \leq i \leq r} \varphi(p^{r-i+1})^{m_i-m_{i-1}}$$

Si par exemple, $2 \leq u_r \leq r$, on peut remplacer dans le système de générateurs de S_r donné en I.3, $c_1^{\alpha_0} b_0$ par $c_1^{\alpha_0+k_0 p^r} b_0$, $c_1^{\alpha_2} c_2$ par $c_1^{\alpha_2+k_2 p^r} c_2$, ... et choisir ainsi des α_i , compris entre 0 et p^r . Vérifiant cette condition supplémentaire, les valeurs de α_i sont alors déterminées de façon unique par le

choix d'un sous-groupe S_r . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_j vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions K_r , de degré 2^r sur Q , cycliques sur Q , admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est :

— Dans le cas où $3 \leq u_r \leq r + 1$:

$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$ ou 2 :

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE K_r DANS $K_{r'}$.

PROPOSITION I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r .

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q , contenant K_r , si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifie la condition :

I.6.A : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i$, $p_j \equiv 1 \pmod{p^{r'-i+1}}$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r .

Plaçons-nous dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $n'_i = p^{i-r} n_r$ pour $r < i \leq r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_r)$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo n'_r fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_r)$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.