Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Autor: Oriat, Bernard

Kapitel: I.9. Conditions d'inclusion de K_r dans $K_{r'}$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

choix d'un sous-groupe S_r. Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_j vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 *bis*.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant les conditions I.2.A *bis* et I.2.B *bis*, le nombre d'extensions K_r, de degré 2^r sur Q, cycliques sur Q, admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est:

— *Dans le cas où* $3 \leq u_r \leq r + 1$:

$$2^{r-l+1}\, 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

— *Dans le cas où* $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

— *Dans le cas où* $u_r = 0$ ou 2:

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i - m_{i-1})}$$

I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE K_r DANS $K_{r'}$

PROPOSITION I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r.

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q, contenant K_r, si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifie la condition:

I.6.A : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i$, $p_j \equiv 1\ (p^{r'-i+1})$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r.

Plaçons-nous dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $n'_i = p^{i-r} n_r$ pour $r < i \leq r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_{r'})$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo $n'_{r'}$ fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_{r'})$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.

Soient $b'_0, c'_1, c'_2, \dots c'_{m_r}$ des générateurs des sous-groupes

$$T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p^{u'_{r'}}}\right), T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_1}\right), \dots T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_{m_r}}\right)$$

et soit

$$b_0 = \pi(b'_0), c_1 = \pi(c'_1), \dots c_{m_r} = \pi(c'_{m_r}).$$

Alors $b_0, c_1, \dots c_{m_r}$ sont des générateurs de

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{u_r}}\right), T\left(n_r, \frac{n_r}{p_1}\right), \dots T\left(n_r, \frac{n_r}{p_{m_r}}\right).$$

Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ admettant K_r comme corps fixe. D'après la proposition I.3, il existe $\alpha_0, \alpha_2, \dots \alpha_{m_r}$ vérifiant I.3.A et I.3.B et tels que S_r soit engendré par:

$$\{c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}.$$

Soit $S'_{r'}$ le sous-groupe de $G(n'_{r'})$ engendré par: $\{c_1'^{p^{r'}}, c_1'^{\alpha_0} b'_0, c_1'^{\alpha_j} c'_j; 2 \leq j \leq m_r\}$ et soit $K_{r'}$ le sous-corps de $\Omega(n'_{r'})$ corps fixe de $S'_{r'}$. D'après la proposition I.4, $K_{r'}$ est une extension cyclique de degré $p^{r'}$ de Q.

D'autre part, on vérifie que $\pi(S'_{r'}) \subset S_r$ qui prouve que $K_{r'}$ contient K_r.

Remarque : On a construit, en fait, plusieurs extensions $K'_{r'}$ contenant K_r. S_r étant donné, les α_i ne sont déterminés que modulo p^r et si l'on remplace α_i par α'_i tel que $\alpha_i \equiv \alpha'_i (p^r)$ et $\alpha_i \not\equiv \alpha'_i (p^{r'})$ on obtiendra un autre sous-groupe $S'_{r'}$.

Dans le cas où $u_r = r + 1$, la démonstration est analogue.

Dans le cas où $u_r = 0$, on pose simplement $n'_i = n_r$ pour tout i entre r et r' et l'application π est alors l'identité.

PROPOSITION I.6 *bis*.

> Soit K_r une extension cyclique de degré 2^r sur Q, $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r. Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $2^{r'}$ sur Q, contenant K_r si et seulement si:
>
> *I.6.A bis :* Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i$, $p_j \equiv 1\ (2^{r'-i+1})$.
>
> *I.6.B bis :* K_r est réelle.

I.6.A *bis* s'obtient à partir de I.2.B *bis*.

D'autre part il est nécessaire que K_r soit réelle car: $(-1)^2 = 1 \in S_r$, implique, d'après le lemme I.1, $-1 \in S_i$ pour tout $i < r'$. Donc tous les sous-corps stricts de $K_{r'}$ sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si $u_r = 0$, -1 se décompose dans les sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A *bis* que si $j \leq m_i$, alors $\frac{p_j - 1}{2} \equiv 0\ (2^{r-i+1})$ et compte tenu du lemme I.2 *bis*, $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$. Donc $-1 \in S_r$ et K_r est réelle.

Donc si $u_r = 0$, I.6.B *bis* est une conséquence de I.6.A *bis* et on démontre l'existence de $K_{r'}$ comme précédemment.

Si maintenant $u_r \geq 2$, -1 se décompose dans $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ et $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

La condition I.6.A *bis* implique donc comme précédemment, que $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$ d'où $-a_0 \in S_r$.

Si $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$ (lemme I.2 *bis*) donc les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* sont incompatibles.

Si $u_r \geq 3$, les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* impliquent donc $a_0 \in S_r$, d'où $\alpha_0 \equiv 0\ (2^r)$.

On termine la démonstration comme précédemment.

Chapitre II

DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

II.1. Rappels

Soient K et K' deux corps de nombres, K' étant abélien sur K. Soient A et A' leurs anneaux d'entiers respectifs et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. $\mathfrak{p}A'$ se décompose en idéaux premiers de A' sous la forme: $\mathfrak{p}A' = (\prod_{1 \leq v \leq g} \mathfrak{p}_v)^e$