II.1. Rappels

D'autre part il est nécessaire que K_r soit réelle car: $(-1)^2 = 1 \in S_r$, implique, d'après le lemme I.1, $-1 \in S_i$ pour tout $i < r'$. Donc tous les sous-corps stricts de $K_{r'}$ sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si $u_r = 0$, -1 se décompose dans les sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A *bis* que si $j \leq m_i$, alors $\frac{p_j - 1}{2} \equiv 0\ (2^{r-i+1})$ et compte tenu du lemme I.2 *bis*, $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$. Donc $-1 \in S_r$ et K_r est réelle.

Donc si $u_r = 0$, I.6.B *bis* est une conséquence de I.6.A *bis* et on démontre l'existence de $K_{r'}$ comme précédemment.

Si maintenant $u_r \geq 2$, -1 se décompose dans $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ et $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j - 1}{2}}.$$

La condition I.6.A *bis* implique donc comme précédemment, que $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$ d'où $-a_0 \in S_r$.

Si $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$ (lemme I.2 *bis*) donc les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* sont incompatibles.

Si $u_r \geq 3$, les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* impliquent donc $a_0 \in S_r$, d'où $\alpha_0 \equiv 0\ (2^r)$.

On termine la démonstration comme précédemment.

Chapitre II

DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

II.1. Rappels

Soient K et K' deux corps de nombres, K' étant abélien sur K. Soient A et A' leurs anneaux d'entiers respectifs et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. $\mathfrak{p}A'$ se décompose en idéaux premiers de A' sous la forme: $\mathfrak{p}A' = (\prod_{1 \leq v \leq g} \mathfrak{p}_v)^e$

et pour tout v de 1 à g, $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$ a pour dimension f sur $\frac{A}{\mathfrak{p}}$. f est le degré résiduel de $\mathfrak{p}_v$ sur K et e l'indice de ramification de $\mathfrak{p}_v$ sur K (ou de $\mathfrak{p}$ dans K'). On a les relations:

$$efg = [K':K] \quad \text{et} \quad N_{K'/K}(\mathfrak{p}_v) = \mathfrak{p}^f .$$

Les $\mathfrak{p}_v$, $1 \leq v \leq g$, sont exactement les idéaux premiers de A' contenant $\mathfrak{p}$.

Soit $G(K'/K)$ le groupe de Galois de K' sur K. L'ensemble des σ de $G(K'/K)$ tel que $\sigma(\mathfrak{p}_v) = \mathfrak{p}_v$ est un sous-groupe de $G(K'/K)$ ne dépendant pas de v et appelé groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_v$ sur K (ou de $\mathfrak{p}$ dans K'). Son cardinal est égal à ef. S'il est égal à 1, on dit que $\mathfrak{p}$ se décompose complètement dans K'.

L'ensemble des σ de $G(K'/K)$ tel que $\sigma(x) - x$ appartienne à $\mathfrak{p}_v$ pour tout x de A', est un sous-groupe de $G(K'/K)$ ne dépendant pas de v et appelé groupe d'inertie de $\mathfrak{p}_v$ sur K (ou de $\mathfrak{p}$ dans K').

Son cardinal est égal à e. $\mathfrak{p}$ est dit ramifié dans K' si $e \geq 2$ ([1] chapitre 5; [2] chapitre 5).

Soit K'' un corps de nombres, contenant K' et abélien sur K, et soit A'' son anneau d'entiers. Si $\mathfrak{p}_v A''$ se décompose en idéaux premiers de A'' sous la forme: $\mathfrak{p}_v A'' = (\prod_{1 \leq v' \leq g'} \mathfrak{p}_{vv'})^{e'}$ et si f' désigne le degré résiduel de $\mathfrak{p}_{vv'}$ sur K', les quantités e', g', f' sont les mêmes pour tout v entre 1 et g. L'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans K'' est ee' et son degré résiduel ff'. Si D est le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_{vv'}$ sur K et π l'application de $G(K''/K)$ sur $G(K'/K)$ qui à tout automorphisme de K'' fait correspondre sa restriction à K', alors $D \cap G(K''/K')$ est le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_{vv'}$ sur K' et $\pi(D)$ est le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_v$ sur K. On a un résultat analogue avec les groupes d'inertie ([3] chapitre 1).

On appelle corps de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K' le sous-corps de K' laissé invariant par les éléments du groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K'. C'est le plus grand corps, compris entre K et K', dans lequel $\mathfrak{p}$ se décompose complètement. De même le corps d'inertie de $\mathfrak{p}$ dans K' est le sous-corps de K' laissé invariant par les éléments du groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ dans K'. C'est le plus grand corps compris entre K et K', dans lequel $\mathfrak{p}$ ne se ramifie pas ([4] chapitre 2).

Différente : L'ensemble des x de K' tels que $Tr_{K'/K}(xA') \subseteq A$, est un idéal fractionnaire de K' dont l'inverse est la différente de K' sur K notée $\delta_{K'/K}$. Elle est engendrée par les $F'(x)$, où x parcourt A' et F désigne le polynome minimal de x sur K. Si $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m$ sont les idéaux de A' ramifiés sur K, alors:

$$\delta_{K'/K} = \prod_{1 \leq v \leq m} \mathfrak{p}_v^{h_v}.$$

Si e_v est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}_v$ sur K on a: $h_v \geqq e_v - 1$ et $h_v = e_v - 1$ si et seulement si e_v est premier avec la caractéristique du corps $\frac{A'}{\mathfrak{p}_v}$. Le discriminant de K' sur K est $N_{K'/K}(\delta_{K'/K})$ et on a la formule de transitivité: $\delta_{K''/K} = \delta_{K''/K'}\, \delta_{K'/K}$ ([2] chapitre 4, [5] chapitre 3).

Corps cyclotomiques: Dans un corps cyclotomique $\Omega(p^s)$, (p premier) p est leur seul nombre premier ramifié et: $p = (1-\xi)^{\varphi(p^s)}$, ξ désignant une racine primitive $(p^s)^{\text{eme}}$ de 1, est la décomposition de p en idéaux premiers de $\Omega(p^s)$.

p est ramifié dans un corps cyclotomique $\Omega(n)$ si et seulement si p divise n. Si n s'écrit: $n = p^s n'$ avec n' premier avec p, alors le corps d'inertie de p dans $\Omega(n)$ est $\Omega(n')$ et l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $\varphi(p^s)$. Si q est premier avec n, la classe de q modulo n est l'automorphisme de Frœbenius, et elle engendre dans $G(n)$ le groupe de décomposition de q dans $\Omega(n)$. Le degré résiduel de q dans $\Omega(n)$ est donc le plus petit entier f tel que: $q^f \equiv 1\ (n)$.

Si ξ est une racine primitive n^{eme} de 1, $\{1, \xi, \ldots \xi^{\varphi(n)-1}\}$ est une base de l'anneau des entiers de $\Omega(n)$ sur Z. Le discriminant de $\Omega(n)$ sur Q est:

$$\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}$$

ce dernier produit étant étendu à tous les nombres premiers p divisant n ([5] chapitre 4).

II.2. Nombres premiers ramifiés dans une extension abélienne de Q

Lemme II.1.

> Soient K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K. Alors un nombre premier p se ramifie dans K si et seulement s'il divise n.

Si p est ramifié dans K, alors il est ramifié dans tout surcorps de K, donc dans $\Omega(n)$ et il divise n.

Réciproquement, si p divise n, posons $n = p^s n'$, avec n' premier avec p.