$$Tr_{K_r/Q}(x) = Tr_{K_r/Q}(x'') = p\, Tr_{K_{r-1}/Q}(x'') .$$

La trace d'un entier de K_r ne peut donc être égale à 1.

Soit maintenant K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K. Supposons qu'il existe un entier θ de K tel que: $Tr_{K/Q}(\theta) = 1$.
Le groupe de Galois de K sur Q est produit direct de m groupes cycliques d'ordre $p_i^{r_i}$.
Soit K_i le corps fixe de $G_1 \times \dots \times G_{i-1} \times \{1\} \times G_{i+1} \times \dots \times G_m$. K_i est cyclique de degré $p_i^{r_i}$ sur Q et $K = K_1 K_2 \dots K_m$.
Soit $\theta_i = Tr_{K/K_i}(\theta)$. θ_i est un entier de K_i tel que $Tr_{K_i/Q}(\theta_i) = 1$.
Si $\Omega(n_i)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant K_i alors n_i est sans facteur carré d'après la démonstration précédente.
n est le $PPCM$ des n_i, donc il est sans facteur carré.

Soit p un nombre premier se ramifiant dans K, c'est-à-dire divisant n. Si n est sans facteur carré, alors l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $p - 1$ et l'indice de ramification de p dans K, divise $p - 1$, donc est premier à p.

Réciproquement, si n possède un facteur carré, alors n est de la forme $n = p^s n'$, avec p premier, ne divisant pas n' et $s \geqq 2$. Soit π l'application de $G(n)$ sur $G(K/Q)$ qui à tout automorphisme de $\Omega(n)$ fait correspondre sa restriction à K. Puisque $K \nsubseteq \Omega\left(\frac{n}{p}\right)$, alors

$$Ker\,\pi = G(\Omega(n)/K) \nsupseteq T\left(n, \frac{n}{p}\right).$$

Donc $\pi\left(T\left(n, \frac{n}{p}\right)\right)$ a pour ordre p et il est inclus dans $\pi\,(T(n, n'))$ qui est le groupe d'inertie de p dans K. L'indice de ramification de p dans K est donc multiple de p.

III.4. Bases d'entiers dans les extensions K_r

Proposition III.3.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q, $\Omega(n_r)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K_r.

On suppose que $u_r \geqq 2$; c'est-à-dire que K_r ne possède pas de base d'entiers normale. ξ désignant une racine primitive n_r^{eme} de 1, on pose $\theta_i = \sum_{s \in S_r} \xi^{sp^{r-i}}$ pour tout i de l à r.

Si p est impair ou si $p = 2$ et $u_r = 2$, on pose:

$$\theta_{l-1} = \sum_{s \in S_r} \xi^{sp^{r-l+1}}$$

Si $p = 2$ et $u_r \geqq 3$, on pose:

$$\theta_{l-1} = \tfrac{1}{2} \sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+2}}$$

σ est un générateur du groupe de Galois de K_r sur Q.
Alors:

$$B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1}) \cup \Big(\bigcup_{l \leq i \leq r} B(\theta_i, \sigma, \varphi(p^i)) \Big)$$

est une base de l'anneau des entiers de K_r.

On montre tout d'abord que $B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1})$ est une base de l'anneau des entiers de K_{l-1}.

Dans le cas où p est impair ou $p = 2$ et $u_r = 2$, on a: $u_r = r - l + 2$, $K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \cdot \frac{n_r}{p^{r-l+1}}$ est sans facteur carré, donc $\xi^{p^{r-l+1}}$ engendre une base normale des entiers de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{p^{r-l+1}}\right)$ engendre donc une base normale des entiers de K_{l-1}. Il reste donc à montrer que cette quantité est égale à θ_{l-1}. Pour cela introduisons l'application π_{l-1} de $G(n_r)$ dans $G\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ qui à toute classe modulo n_r fait correspondre la classe modulo $\frac{n_r}{p^{r-l+1}}$ qui la contient. S_r étant le groupe des K_r-automorphismes de $\Omega(n_r)$, $\pi_{l-1}(S_r)$ sera le groupe des $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$-automorphismes de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

Comme $K_l \nsubseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$, (condition I.2.A; $u_l = 2$) on a donc

$$K_{l-1} = K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$$

$\pi_{l-1}(S_r)$ est donc le groupe des K_{l-1}-automorphismes de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

On aura donc l'égalité:

$$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{p^{r-l+1}}\right) = \sum_{s' \in \pi_{l-1}(S_r)} \xi^{s' p^{r-l+1}}$$

D'autre part, on déduit des égalités:

$$\left[K_r \,.\, \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) : \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)\right] = \left[K_r : K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)\right] = p^{r-l+1}$$

et

$$\left[\Omega(n_r) : \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)\right] = p^{r-l+1},$$

que

$$\Omega(n_r) = K_r \,.\, \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right).$$

Les sous-groupes de $G(n_r)$ correspondants vont donc vérifier:

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \cap S_r = 1$$

La restriction de π_{l-1} à S_r est donc bijective. On en déduit:

$$\sum_{s' \in \pi_{l-1}(S_r)} \xi^{s' p^{r-l+1}} = \sum_{s \in S_r} \xi^{\pi_{l-1}(s)\, p^{r-l+1}}.$$

Cette dernière quantité est égale à θ_{l-1} puisque, par définition de π_{l-1}: on a

$$s \equiv \pi_{l-1}(s) \left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$$

d'où

$$s p^{r-l+1} \equiv \pi_{l-1}(s)\, p^{r-l+1}\, (n_r)$$

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geqq 3$, on a alors: $u_r = r - l + 3$ et l'on utilise alors l'application π_{l-2} de $G(n_r)$ sur $G\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$. La démonstration est identique à la précédente, à ceci près que:

$$\left[\Omega(n_r) : K_r \,.\, \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)\right] = 2$$

c'est-à-dire que $T\left(n_r, \dfrac{n_r}{2^{r-l+2}}\right) \cap S_r$ possède deux éléments. On aura cette fois:

$$\sum_{s' \in \pi_{l-2}(S_r)} \xi^{s' 2^{r-l+2}} = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_r} \xi^{\pi_{l-2}(s)\, 2^{r-l+2}}$$

On montre ensuite par récurrence sur t que:

$$B_t = B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1}) \cup \Big(\bigcup_{l \leq i \leq t} B(\theta_i, \sigma, \varphi(p^i)) \Big)$$

est une base de K_t. Supposons donc que B_{t-1} soit une base de l'anneau des entiers de K_{t-1}. Soit π_t l'application canonique de $G(n_r)$ sur $G\left(\dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right)$.

Comme $K_t \subseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ et $K_{t+1} \nsubseteq \Omega\left(\dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ (proposition I.2; condition I.2.A; $u_{i+1} = u_i + 1$), on a

$$K_t = \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right) \cap K_r$$

et $\pi_t(S_r)$ est le groupe des K_t-automorphismes de $\Omega\left(\dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right)$.

Si $\theta_t' = \sum_{s' \in \pi_t(S_r)} \xi^{s' p^{r-t}}$, la proposition III.1 et la remarque III.1, appliquées à $\Omega\left(\dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ et K_t permettent de conclure que: $B_{t-1} \cup B(\theta_t', \sigma, \varphi(p^t))$ est une base de l'anneau des entiers de K_t. Il reste alors à montrer que $\theta_t' = \theta_t$. Ceci se déduit comme précédemment de l'égalité $T\left(n_r, \dfrac{n_r}{p^{r-t}}\right) \cap S_r = 1$, toujours vraie si $l \leqq t \leqq r$.

On utilisera dans le paragraphe suivant les remarques:

Remarque III.3.A

Pour tout $i \geqq l$ $Tr_{K_i/K_{i-1}}(\theta_i) = 0$.

En effet:

$$\begin{aligned} Tr_{K_i/K_{i-1}}(\theta_i) &= Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i}}\right)/K_{i-1}}\left(\xi^{p^{r-i}}\right) \\ &= Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)/K_{i-1}}\left(Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)}\left(\xi^{p^{r-i}}\right)\right) \end{aligned}$$

Cette quantité est nulle car $X^p - \xi^{p^{r-i+1}}$ est le polynome minimal de $\xi^{p^{r-i}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)$.

Remarque III.3.B

$$Tr_{K_{l-1}/Q}(\theta_{l-1}) = (-1)^{m_r+1}$$

Il suffit d'appliquer le lemme III.1 à $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ ou $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$, suivant les cas.

Remarque III.3.C

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geqq 3$, on a:

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = 0$$

En effet:

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right)$$

et d'autre part

$$K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$$

et

$$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right) = 0$$

car $X^2 - \xi^{2^{r-l+2}}$ est le polynome minimal de $\xi^{2^{r-l+1}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$.

III.5. Exemple

Soit B la base introduite à la proposition III.3. On se propose de chercher les polynomes caractéristiques des θ_i. Pour cela, il faut pouvoir calculer les coordonnées, par rapport à B, des produits mutuels d'éléments de B.

Les θ_i sont des périodes de Gauss ([7] chapitre 7). On pose pour tout entier a: $\eta(a) = \sum_{s \in S_r} \xi^{as}$.