

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Kapitel: III.4. Bases d'entiers dans les extensions K_r

Autor: Oriat, Bernard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$Tr_{K_r/Q}(x) = Tr_{K_r/Q}(x'') = p Tr_{K_{r-1}/Q}(x'').$$

La trace d'un entier de K_r ne peut donc être égale à 1.

Soit maintenant K une extension abélienne de Q et $\Omega(n)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K . Supposons qu'il existe un entier θ de K tel que: $Tr_{K/Q}(\theta) = 1$.

Le groupe de Galois de K sur Q est produit direct de m groupes cycliques d'ordre $p_i^{r_i}$.

Soit K_i le corps fixe de $G_1 \times \dots \times G_{i-1} \times \{1\} \times G_{i+1} \times \dots \times G_m$. K_i est cyclique de degré $p_i^{r_i}$ sur Q et $K = K_1 K_2 \dots K_m$.

Soit $\theta_i = Tr_{K/K_i}(\theta)$. θ_i est un entier de K_i tel que $Tr_{K_i/Q}(\theta_i) = 1$.

Si $\Omega(n_i)$ est le plus petit corps cyclotomique contenant K_i alors n_i est sans facteur carré d'après la démonstration précédente.

n est le PPCM des n_i , donc il est sans facteur carré.

Soit p un nombre premier se ramifiant dans K , c'est-à-dire divisant n . Si n est sans facteur carré, alors l'indice de ramification de p dans $\Omega(n)$ est $p - 1$ et l'indice de ramification de p dans K , divise $p - 1$, donc est premier à p .

Réciproquement, si n possède un facteur carré, alors n est de la forme $n = p^s n'$, avec p premier, ne divisant pas n' et $s \geq 2$. Soit π l'application de $G(n)$ sur $G(K/Q)$ qui à tout automorphisme de $\Omega(n)$ fait correspondre sa restriction à K . Puisque $K \not\subseteq \Omega\left(\frac{n}{p}\right)$, alors

$$Ker \pi = G(\Omega(n)/K) \not\subseteq T\left(n, \frac{n}{p}\right).$$

Donc $\pi\left(T\left(n, \frac{n}{p}\right)\right)$ a pour ordre p et il est inclus dans $\pi(T(n, n'))$ qui est le groupe d'inertie de p dans K . L'indice de ramification de p dans K est donc multiple de p .

III.4. BASES D'ENTIERS DANS LES EXTENSIONS K_r

PROPOSITION III.3.

|| Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q , $\Omega(n_r)$ le plus petit corps cyclotomique contenant K_r .

On suppose que $u_r \geq 2$; c'est-à-dire que K_r ne possède pas de base d'entiers normale. ξ désignant une racine primitive n_r^{eme} de 1, on pose $\theta_i = \sum_{s \in S_r} \xi^{sp^{r-i}}$ pour tout i de l à r .

Si p est impair ou si $p = 2$ et $u_r = 2$, on pose:

$$\theta_{l-1} = \sum_{s \in S_r} \xi^{sp^{r-l+1}}$$

Si $p = 2$ et $u_r \geq 3$, on pose:

$$\theta_{l-1} = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+2}}$$

σ est un générateur du groupe de Galois de K_r sur Q .

Alors:

$$B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1}) \cup \left(\bigcup_{l \leq i \leq r} B(\theta_i, \sigma, \varphi(p^i)) \right)$$

est une base de l'anneau des entiers de K_r .

On montre tout d'abord que $B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1})$ est une base de l'anneau des entiers de K_{l-1} .

Dans le cas où p est impair ou $p = 2$ et $u_r = 2$, on a: $u_r = r - l + 2$, $K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \cdot \frac{n_r}{p^{r-l+1}}$ est sans facteur carré, donc $\xi^{p^{r-l+1}}$ engendre une base normale des entiers de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{p^{r-l+1}}\right)$ engendre donc une base normale des entiers de K_{l-1} . Il reste donc à montrer que cette quantité est égale à θ_{l-1} . Pour cela introduisons l'application π_{l-1} de $G(n_r)$ dans $G\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ qui à toute classe modulo n_r fait correspondre la classe modulo $\frac{n_r}{p^{r-l+1}}$ qui la contient.

S_r étant le groupe des K_r -automorphismes de $\Omega(n_r)$, $\pi_{l-1}(S_r)$ sera le groupe des $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ -automorphismes de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

Comme $K_l \not\subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$, (condition I.2.A; $u_l = 2$) on a donc

$$K_{l-1} = K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$$

$\pi_{l-1}(S_r)$ est donc le groupe des K_{l-1} -automorphismes de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$.

On aura donc l'égalité:

$$\text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{p^{r-l+1}}\right) = \sum_{s' \in \pi_{l-1}(S_r)} \xi^{s' p^{r-l+1}}$$

D'autre part, on déduit des égalités:

$$\left[K_r \cdot \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) : \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \right] = \left[K_r : K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \right] = p^{r-l+1}$$

et

$$\left[\Omega(n_r) : \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \right] = p^{r-l+1},$$

que

$$\Omega(n_r) = K_r \cdot \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right).$$

Les sous-groupes de $G(n_r)$ correspondants vont donc vérifier:

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right) \cap S_r = 1$$

La restriction de π_{l-1} à S_r est donc bijective. On en déduit:

$$\sum_{s' \in \pi_{l-1}(S_r)} \xi^{s' p^{r-l+1}} = \sum_{s \in S_r} \xi^{\pi_{l-1}(s) p^{r-l+1}}.$$

Cette dernière quantité est égale à θ_{l-1} puisque, par définition de π_{l-1} :

on a

$$s \equiv \pi_{l-1}(s) \left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}} \right)$$

d'où

$$s p^{r-l+1} \equiv \pi_{l-1}(s) p^{r-l+1} (n_r)$$

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geq 3$, on a alors: $u_r = r - l + 3$ et l'on utilise alors l'application π_{l-2} de $G(n_r)$ sur $G\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$. La démonstration est identique à la précédente, à ceci près que:

$$\left[\Omega(n_r) : K_r \cdot \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right) \right] = 2$$

c'est-à-dire que $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right) \cap S_r$ possède deux éléments. On aura cette fois:

$$\sum_{s' \in \pi_{l-2}(S_r)} \xi^{s' 2^{r-l+2}} = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_r} \xi^{\pi_{l-2}(s) 2^{r-l+2}}$$

On montre ensuite par récurrence sur t que:

$$B_t = B(\theta_{l-1}, \sigma, p^{l-1}) \cup \left(\bigcup_{l \leq i \leq t} B(\theta_i, \sigma, \varphi(p^i)) \right)$$

est une base de K_t . Supposons donc que B_{t-1} soit une base de l'anneau des entiers de K_{t-1} . Soit π_t l'application canonique de $G(n_r)$ sur $G\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right)$.

Comme $K_t \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ et $K_{t+1} \not\subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ (proposition I.2; condition I.2.A; $u_{i+1} = u_i + 1$), on a

$$K_t = \Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right) \cap K_r$$

et $\pi_t(S_r)$ est le groupe des K_t -automorphismes de $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right)$.

Si $\theta'_t = \sum_{s' \in \pi_t(S_r)} \xi^{s' p^{r-t}}$, la proposition III.1 et la remarque III.1, appliquées à $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-t}}\right)$ et K_t permettent de conclure que: $B_{t-1} \cup B(\theta'_t, \sigma, \varphi(p^t))$ est une base de l'anneau des entiers de K_t . Il reste alors à montrer que $\theta'_t = \theta_t$.

Ceci se déduit comme précédemment de l'égalité $T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{r-t}}\right) \cap S_r = 1$, toujours vraie si $l \leq t \leq r$.

On utilisera dans le paragraphe suivant les remarques:

Remarque III.3.A

Pour tout $i \geq l$ $Tr_{K_i/K_{i-1}}(\theta_i) = 0$.

En effet:

$$\begin{aligned} Tr_{K_i/K_{i-1}}(\theta_i) &= Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i}}\right)/K_{i-1}}\left(\xi^{p^{r-i}}\right) \\ &= Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)/K_{i-1}}\left(Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)}\left(\xi^{p^{r-i}}\right)\right) \end{aligned}$$

Cette quantité est nulle car $X^p - \xi^{p^{r-i+1}}$ est le polynome minimal de $\xi^{p^{r-i}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)$.

Remarque III.3.B

$$\text{Tr}_{K_{l-1}/\mathbb{Q}}(\theta_{l-1}) = (-1)^{m_{r+1}}$$

Il suffit d'appliquer le lemme III.1 à $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ ou $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$, suivant les cas.

Remarque III.3.C

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geq 3$, on a :

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = 0$$

En effet :

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = \text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right)$$

et d'autre part

$$K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$$

et

$$\text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right) = 0$$

car $X^2 - \xi^{2^{r-l+2}}$ est le polynome minimal de $\xi^{2^{r-l+1}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$.

III.5. EXEMPLE

Soit B la base introduite à la proposition III.3. On se propose de chercher les polynomes caractéristiques des θ_i . Pour cela, il faut pouvoir calculer les coordonnées, par rapport à B , des produits mutuels d'éléments de B .

Les θ_i sont des périodes de Gauss ([7] chapitre 7). On pose pour tout entier a : $\eta(a) = \sum_{s \in S_r} \xi^{as}$.