Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p' SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS
Autor: Oriat, Bernard
Kapitel: III.5. Exemple
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45361

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Cette quantité est nulle car $X^p - \xi^{p^{r-i+1}}$ est le polynome minimal de $\xi^{p^{r-i}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)$.

Remarque III.3.B

$$Tr_{K_{l-1}/Q}(\theta_{l-1}) = (-1)^{m_r+1}$$

Il suffit d'appliquer le lemme III.1 à $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$ ou $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$, suivant les cas.

Remarque III.3.C

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geqq 3$, on a:

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = 0$$

En effet:

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right)$$

et d'autre part

$$K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$$

et

$$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right) = 0$$

car $X^2 - \xi^{2^{r-l+2}}$ est le polynome minimal de $\xi^{2^{r-l+1}}$ sur $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$.

III.5. Exemple

Soit B la base introduite à la proposition III.3. On se propose de chercher les polynomes caractéristiques des θ_i. Pour cela, il faut pouvoir calculer les coordonnées, par rapport à B, des produits mutuels d'éléments de B.

Les θ_i sont des périodes de Gauss ([7] chapitre 7). On pose pour tout entier a: $\eta(a) = \sum_{s \in S_r} \xi^{as}$.

On a en particulier:

$$\theta_i = \eta(p^{r-i}) \quad \text{pour} \quad l \leqq i \leqq r$$

et suivant les cas:

$$\theta_{l-1} = \eta(p^{r-l+1}) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\eta(2^{r-l+2}).$$

Pour tout b appartenant à $G(n_r)$, le transformé de $\eta(a)$ par b est $\eta(ab)$. En particulier les conjugués de θ_i, pour $l \leqq i \leqq r$, seront:

$$\sigma^k(\theta_i) = \eta(g^k p^{r-i}).$$

Le produit de deux périodes $\eta(a)$ et $\eta(a')$ est donné par: $\eta(a)\,\eta(a') = \sum_{s \in S_r} \eta(a+a's)$. Appliquant cette formule à deux éléments de B, on est alors ramené au problème suivant: donner les coordonnées de $\eta(a)$, a entier quelconque, dans la base B.

c et c' désignent dans ce qui suit, des nombres premiers avec p.

1. Dans le cas p impair ou $p = 2$ et $u_r = 2$, $\eta(p^u c)$, avec $u \geqq r - l + 2$, peut s'exprimer comme somme de périodes de la forme $\eta(p^{r-l+1}c')$. Il suffit d'écrire l'égalité:

$$\sum_{0<k<p} \xi^{\frac{n_r}{p}k} = -1;$$

multipliant alors cette égalité par $\xi^{p^u c}$ on obtient:

$$\sum_{0<k<p} \eta\left(\frac{n_r}{p}k + p^u c\right) = -\eta(p^u c).$$

Les quantités $\dfrac{n_r}{p}k + p^u c$ sont de la forme $p^{r-l+1}c'$.

Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geqq 3$, $\eta(2^u c)$, avec $u \geqq r - l + 3$, est l'opposé d'une période $\eta(2^{r-l+2}c')$.

2. $\eta(p^u c)$, avec $u \leqq r - l + 1$ (ou $u \leqq r - l + 2$, suivant les cas) peut s'exprimer comme somme de périodes de la forme $\eta(p^u c')$, c' appartenant à $G(n_r)$, en procédant de la même façon qu'au lemme III.2. C'est-à-dire: si v désigne le $PGCD$ de c et de n_r, et m_v le nombre de diviseurs premiers de v, on a:

$$\sum_{\substack{0<k<v \\ PGCD(k,v)=1}} \xi^{\frac{n_r}{v}k} = (-1)^{m_v}$$

d'où:

$$(-1)^{mv}\,\eta\,(p^u c) = \sum_{\substack{0<k<v \\ PGCD(k,v)=1}} \eta\left(\frac{n_r}{v}k + p^u c\right)$$

Les quantités $\frac{n_r}{v}k + p^u c$ sont de la forme $p^u c'$, avec c' premier avec n_r.

Cas particulier :

Si $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right) \subset K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^u}\right)$ et $u \leq r - l$, alors $\eta\,(p^u c) = 0$.

En effet on a: $$PGCD\left(\frac{n_r}{p^u}, \frac{n_r}{v}\right) = \frac{n_r}{p^u v}.$$

D'où $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right) \subset \Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)$. En employant la même méthode que dans la démonstration de la proposition III.3, $\eta\,(p^u c)$ est égal, à un coefficient près, à:

$$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)/K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right)}\left(\xi^{p^u c}\right)$$

Comme $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^u}\right) \supset K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right)$ et comme $u \leq r - l$, on aura donc:

$$K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}}\right) \supseteq K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right).$$

$\Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}v}\right)$ sera donc compris entre $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right)$ et $\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)$ et l'on a

$$Tr_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}v}\right)}\left(\xi^{p^u c}\right) = 0$$

3. $\eta\,(p^u c)$, avec $u \leq r - l + 1$ (ou $u \leq r - l + 2$ suivant le cas) et c premier avec n_r, est un conjugué de $\eta\,(p^u) = \theta_{r-u}$ (à moins qu'il ne soit nul; remarque III.3.C).
S'il n'est pas dans B, alors ses conjugués sur K_{r-u-1}, seront dans B et il suffit alors d'utiliser la remarque III.3.A.

Considérons par exemple, la suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A *bis* et I.2.B *bis*: $\Omega(17)$, $\Omega(8.17)$, $\Omega(16.17)$.
On a donc $r = 3$; $l = 2$; $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $p_1 = 17$.
Il y a quatre extensions K_3, cycliques de degré 8 sur Q associées à cette suite (proposition I.5 *bis*).
Elles ont pour discriminant sur Q: $2^{22}\,17^7$ (proposition II.3).
$T(16.17, 17)$ a pour éléments 1, 35, 69, 103, 137, 171, 205, 239.
$a_0 = 239$ et l'on peut choisir comme générateur de $T(16.17, 4.17)$:

$a_0' = 69$.

On cherche de même les éléments de $T(16.17, 16)$ et un générateur c_1 de ce sous-groupe. On peut prendre par exemple $c_1 = 65$. Les puissances successives de c_1 sont données par le tableau suivant:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
65	145	177	81	97	49	193	33	241	161	129	225	209	257	113

S_3 est engendré par $\{ c_1^8, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha_0'} a_0' \}$, α_0 et α_0' vérifiant les conditions $\alpha_0 \equiv 0\ (4)$; $\alpha_0' \equiv 0\ (2)$ et $\alpha_0' \not\equiv 0\ (4)$ (proposition I.4 *bis*). Les éléments de S_3 sont de la forme:

$$s = c_1^{8\beta_1 + \alpha_0\beta_0 + \alpha_0'\beta_0'}\, a_0^{\beta_0}\, a_0'^{\beta_0'}$$

avec $\beta_0 = 0$ ou 1; $\beta_0' = 0$, 1, 2 ou 3; $\beta_1 = 0$ ou 1.

Prenons par exemple : $\alpha_0 = 4$ et $\alpha_0' = 2$.

Le tableau suivant donne les valeurs de s, en fonction de β_0, β_0', β_1. On trouve donc à la dernière ligne les éléments de S_3:

β_0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
β_0'	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
β_1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
s	1	213	217	253	33	229	89	189	47	219	135	195	191	155	103	179

On remarque que $3^4 = 81$ n'appartient pas à S_3, c'est-à-dire que la classe de 3 modulo S_3 est un générateur de $\dfrac{G(16.17)}{S_3}$.

On prendra donc $g = 3$. Les classes de $G(16.17)$ mod. S_3 sont données dans le tableau suivant:

S_3	1	213	217	253	33	229	89	189	47	219	135	195	191	155	103	179
$3S_3$	3	95	107	215	99	143	267	23	141	113	133	41	29	193	37	265
3^2S_3	9	13	49	101	25	157	257	69	151	67	127	123	87	35	111	251
3^3S_3	27	39	147	31	75	199	227	207	181	201	109	97	261	105	61	209
3^4S_5	81	117	169	93	225	53	137	77	271	59	55	19	239	43	183	83
3^5S_3	243	79	235	7	131	159	139	231	269	177	165	57	173	129	5	249
3^6S_3	185	237	161	21	121	205	145	149	263	259	223	171	247	115	15	203
3^7S_3	11	167	211	63	91	71	163	175	245	233	125	241	197	73	45	65

$B = \{ \eta(1), \eta(3), \eta(3^2), \eta(3^3), \eta(2), \eta(2.3), \frac{1}{2}\eta(8), \frac{1}{2}\eta(8.3) \}$ est une base de l'anneau des entiers de K_3. On cherche le polynome minimal de $\eta(1)$ sur K_2. Le conjugué de $\eta(1)$ sur K_2 est $\eta(3^4)$ et d'après la remarque III.3.A, $\eta(1) + \eta(3^4) = 0$.

D'autre part: $\eta(1)^2 = \sum_{s \in S_3} \eta(1+s)$.

Il reste à exprimer chacun des $\eta(1+s)$ en fonction de: $\eta(2)$, $\eta(2.3)$, $\eta(8)$, et $\eta(8.3)$.

Par exemple: pour $s = 213$: $\eta(1+213) = \eta(2.107) = \eta(2.3)$ car $107 \in 3\,S_3$.

Pour $s = 33$: $\eta(1+33) = \eta(2.17) = 0$ car $\Omega(16) \cap K_3 = Q \subset K_2 = \Omega(8.17) \cap K_3$.

Pour $s = 47$, on écrit $\xi^{8.17} = -1$ d'où $\xi^{8.17+48} = -\xi^{48}$ c'est-à-dire: $\eta(1+47) = -\eta(8.23) = -\eta(8.3)$.

Pour $s = 195$: $\eta(1+195) = \eta(4.49) = 0$ compte tenu de la remarque III.3.C.

Finalement on obtient: $\eta(1)^2 = -16 - \eta(2) - 2\eta(8.3) + \eta(8)$. Le polynome minimal de $\eta(1)$ sur K_2 est donc:

$$X^2 + 16 + \eta(2) + 2\eta(3.8) - \eta(8)$$

On calcule de la même façon le polynome minimal de $\eta\,(2)$ sur K_1: $X^2 - \eta\,(8) - 16$ et celui de $\eta\,(8)$ sur Q: $X^2 - 2X - 16$.

Les 8 nombres:

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\,,\ \sqrt{17+\sqrt{17}}\,,\ \sqrt{17-\sqrt{17}}\,,$$

$$\sqrt{-17+3\sqrt{17}-\sqrt{17+\sqrt{17}}}\,,\ \sqrt{-17-3\sqrt{17}-\sqrt{17-\sqrt{17}}}$$

$$\sqrt{-17+3\sqrt{17}+\sqrt{17+\sqrt{17}}}\ \text{et}\ \sqrt{-17-3\sqrt{17}+\sqrt{17-\sqrt{17}}}$$

forment une base de l'anneau des entiers de K_3.

Pour les autres valeurs de α_0 et α_0' le résultat est le suivant: les polynomes minimaux de $\eta\,(8)$ et $\eta\,(2)$ restent les mêmes que précédemment. Pour obtenir une base des entiers des autres extensions K_3 admettant la même suite de corps cyclotomiques associée: $\Omega\,(17)$, $\Omega\,(8.17)$, $\Omega\,(16.17)$, il suffit d'ajouter aux quatre nombres:

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\,,\ \sqrt{17+\sqrt{17}}\,,\ \sqrt{17-\sqrt{17}}\,,$$

les quatre autres quantités:

Pour le corps K_3 correspondant à $\alpha_0 = 4$ et $\alpha_0' = 6$:

$$\sqrt{-17+3\sqrt{17}+3\sqrt{17+\sqrt{17}}-4\sqrt{17-\sqrt{17}}}\,,$$

$$\sqrt{-17-3\sqrt{17}+3\sqrt{17-\sqrt{17}}+4\sqrt{17+\sqrt{17}}}\,,$$

$$\sqrt{-17+3\sqrt{17}-3\sqrt{17+\sqrt{17}}+4\sqrt{17-\sqrt{17}}}\,,$$

$$\sqrt{-17-3\sqrt{17}-3\sqrt{17-\sqrt{17}}-4\sqrt{17+\sqrt{17}}}\,,$$

Pour le corps K_3 correspondant à $\alpha_0 = 8$ et $\alpha_0' = 2$:

$$\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{17-\sqrt{17}}}\,,\ \sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{17+\sqrt{17}}}$$

$$\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{17-\sqrt{17}}}\,,\ \sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{17+\sqrt{17}}}$$

Pour le corps K_3 correspondant à $\alpha_0 = 8$ et $\alpha_0' = 6$:

$$\sqrt{17-3\sqrt{17}+3\sqrt{17+\sqrt{17}-4\sqrt{17-\sqrt{17}}}},$$

$$\sqrt{17+3\sqrt{17}+3\sqrt{17-\sqrt{17}+4\sqrt{17+\sqrt{17}}}},$$

$$\sqrt{17-3\sqrt{17}-3\sqrt{17+\sqrt{17}+4\sqrt{17-\sqrt{17}}}},$$

$$\sqrt{17+3\sqrt{17}-3\sqrt{17-\sqrt{17}-4\sqrt{17+\sqrt{17}}}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SAMUEL, P. Théorie algébrique des nombres (Hermann).

[2] Mac CARTHY, P. J. Algebraic extensions of fields (Blaisdell Publishing Company).

[3] HERBRAND, J. Développement moderne de la théorie des corps algébriques. *Mémorial des Sciences Mathématiques* (fasc. LXXV, 1936).

[4] CHEVALLEY, C. Théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *Journ. of the Faculty of Sciences*, Tokyo 1933, 365.

[5] LANG, S. Algebraic Numbers (Addison-Wesley Publishing Company).

[6] —— Algebra (Addison-Wesley Publishing Company).

[7] VAN DER WAERDEN, B. L. Modern Algebra, vol. I (F. Ungar Publishing Company).

(Reçu le 26 octobre 1971)

Bernard Oriat
Faculté des sciences
Route de Gray
F-25 — Besançon