

1. Historique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ANNEAUX DE FATOU

par Jean-Luc CHABERT

1. HISTORIQUE

Fatou [6] a donné une propriété de l'anneau \mathbf{Z} des entiers rationnels, résultat repris par Polya [9] et connu sous le nom de:

1.1 LEMME DE FATOU. *Soient $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes à coefficients entiers rationnels tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(0)$ soit non nul. Si les coefficients a_n du développement en série à l'origine de la fraction $P(X)/Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sont des entiers, alors $Q(0) = 1$.*

Mais cette propriété de \mathbf{Z} est encore vraie pour d'autres anneaux. Ainsi Pisot [8] l'a démontrée pour les anneaux d'entiers d'un corps de nombres:

1.2. PROPOSITION. *Soit a_n le terme général d'une suite d'entiers d'un corps de nombres K . Supposons qu'il existe entre les éléments a_n une relation de récurrence d'ordre s :*

$$(1.2.1) \quad a_{n+s} + q_1 a_{n+s-1} + \dots + q_s a_n = 0$$

et qu'il n'en existe aucune d'ordre $s - 1$. Alors q_1, q_2, \dots, q_s sont des entiers de K .

C'est bien une généralisation du lemme de Fatou, car:

1.3. Etant donné un corps K , pour que la série $\sum a_n X^n$ où les a_n sont des éléments de K représente une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ il faut et il suffit que, pour n assez grand, les éléments a_n vérifient une relation de récurrence de la forme (1.2.1) ([2], Algèbre, IV, § 5, exercice 3). Lorsque ceci est réalisé et que l'ordre s de la relation est le plus petit possible, il existe une représentation de la fraction rationnelle correspondante avec des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ étrangers entre eux et

$$Q(X) = 1 + q_1 X + \dots + q_s X^s.$$

Si de plus le degré de P est strictement inférieur à celui de Q , alors la récurrence (1.2.1) commence à $n = 0$.

1.4. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K , la propriété (i) ci-dessous implique la propriété (ii):

(i) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que $\deg(P) < \deg(Q)$ et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A , alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A .

(ii) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $A[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A , alors $Q(o)$ est inversible dans A .

Notons en outre que Dress [5] a étendu à son tour la propriété (i) en question aux anneaux factoriels.

Ce qui précède conduit à donner les définitions suivantes:

1.5. Etant donné un corps K , une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ à coefficients dans K est dite normalisée si (i) P et Q sont étrangers entre eux (ii) $\deg(P) < \deg(Q)$ (iii) $Q(o) = 1$.

1.6. DÉFINITION (Benzaghou [1]). *Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour toute fraction rationnelle normalisée $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ si les coefficients de son développement en série à l'origine sont dans A , alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A .

(ii) Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifie une relation de récurrence du type (1.2.1), où les coefficients q_k appartiennent à K et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A .

2. SITUATION RÉCENTE

2.1. *Un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est un anneau de Fatou [1].*

Cette assertion donne en particulier tous les cas d'anneaux de Fatou envisagés au paragraphe 1.

2.2. *Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos [1].*