1. Historique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

ANNEAUX DE FATOU

par Jean-Luc CHABERT

1. HISTORIQUE

Fatou [6] a donné une propriété de l'anneau **Z** des entiers rationnels, résultat repris par Polya [9] et connu sous le nom de:

1.1 LEMME DE FATOU. *Soient $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes à coefficients entiers rationnels tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul. Si les coefficients a_n du développement en série à l'origine de la fraction $P(X)/Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sont des entiers, alors $Q(o) = 1$.*

Mais cette propriété de **Z** est encore vraie pour d'autres anneaux. Ainsi Pisot [8] l'a démontrée pour les anneaux d'entiers d'un corps de nombres:

1.2. PROPOSITION. *Soit a_n le terme général d'une suite d'entiers d'un corps de nombres K. Supposons qu'il existe entre les éléments a_n une relation de récurrence d'ordre s:*

(1.2.1) $$a_{n+s} + q_1 a_{n+s-1} + \dots + q_s a_n = o$$

et qu'il n'en existe aucune d'ordre $s - 1$. Alors $q_1, q_2, \dots, q_s$ sont des entiers de K.

C'est bien une généralisation du lemme de Fatou, car:

1.3. Etant donné un corps K, pour que la série $\Sigma a_n X^n$ où les a_n sont des éléments de K représente une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ il faut et il suffit que, pour n assez grand, les éléments a_n vérifient une relation de récurrence de la forme (1.2.1) ([2], Algèbre, IV, § 5, exercice 3). Lorsque ceci est réalisé et que l'ordre s de la relation est le plus petit possible, il existe une représentation de la fraction rationnelle correspondante avec des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ étrangers entre eux et

$$Q(X) = 1 + q_1 X + \dots + q_s X^s.$$

Si de plus le degré de P est strictement inférieur à celui de Q, alors la récurrence (1.2.1) commence à $n = o$.

1.4. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K, la propriété (i) ci-dessous implique la propriété (ii):

(i) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que $\deg(P) < \deg(Q)$ et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $A[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors $Q(o)$ est inversible dans A.

Notons en outre que Dress [5] a étendu à son tour la propriété (i) en question aux anneaux factoriels.

Ce qui précède conduit à donner les définitions suivantes:

1.5. Etant donné un corps K, une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ à coefficients dans K est dite normalisée si (i) P et Q sont étrangers entre eux (ii) $\deg(P) < \deg(Q)$ (iii) $Q(o) = 1$.

1.6. DÉFINITION (Benzaghou [1]). *Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) Pout toute fraction rationnelle normalisée $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ si les coefficients de son développement en série à l'origine sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A vérifie une relation de récurrence du type (1.2.1), où les coefficients q_k appartiennent à K et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A.

2. SITUATION RÉCENTE

2.1. *Un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 *est un anneau de Fatou* [1].

Cette assertion donne en particulier tous les cas d'anneaux de Fatou envisagés au paragraphe 1.

2.2. *Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos* [1].