Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ANNEAUX DE FATOU

Autor: Chabert, Jean-Luc

Kapitel: 3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45364

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2.3. *Rappel.* Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit complètement intégralement clos si: $x \in K$, $d \in A - \{o\}$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $dx^n \in A$ implique $x \in A$.

(Pour montrer l'assertion 2.2 il suffit d'appliquer la définition 1.6. (i) à la fraction rationnelle $\dfrac{d}{1 - xX}$.)

Ces deux résultats font poser la question: la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [1] ? A ce propos on notera que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 (cf. exemple de Nakayama [7], cf. aussi [2], Algèbre commutative, VI, § 4, exercice 6).

2.4. *La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 [4].

2.5. *La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale* [1] *et aux anneaux de polynômes* [3], *mais ne passe pas aux localisés* [4] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).

3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

Etant donné l'assertion 2.2., il reste à montrer que la condition est suffisante. Soit donc A un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions K et soit $P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle normalisée de $K(X)$ dont le développement en série à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans A. Il s'agit de montrer que $Q(X)$ appartient à A $[X]$.

Comme $Q(o) = 1$, $Q(X)$ est égal au produit $\prod_{0 \leq i \leq q} (1 - \alpha_i X)$ où q est le degré de $Q(X)$ et où les α_i sont les inverses des racines de $Q(X)$ dans un corps de décomposition. Pour que les coefficients de $Q(X)$ soient dans A il faut et il suffit que les α_i soient entiers sur A. Comme la fermeture intégrale dans une extension de corps d'un anneau complètement intégralement clos est aussi un anneau complètement intégralement clos ([2], Algèbre commutative, V, § 1, exercice 14), on peut supposer que les racines

de $Q(X)$ sont dans K et il s'agit de montrer que leurs inverses sont dans A. Soit donc $\alpha \in K$ tel que $Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = o$. Soit $d \in A - \{o\}$ tel que $R(X) = d \,.\, Q(X)/(1-\alpha X)$ soit dans $A[X]$ et considérons le développement en série $\Sigma b_n X^n$ de la fraction rationnelle $d \,.\, P(X)/(1-\alpha X) = R(X).(P(X)/Q(X))$. Les b_n vérifient la relation de récurrence:

$$b_{n+1} = \alpha \,.\, b_n \text{ (pour } n \geqq q) \text{ et donc:}$$

$$b_{n+q} = \alpha^n \,.\, b_q \text{ (pour } n \geqq o).$$

En outre b_q ne peut être nul, sinon tous les b_{q+n} seraient nuls, $P(X)/(1-\alpha X)$ serait un polynôme, $\frac{1}{\alpha}$ serait racine de $P(X)$ et la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ ne serait pas normalisée.

D'autre part, l'égalité:

$(\Sigma a_n X^n) \,.\, R(X) = \Sigma b_n X^n$ montre que, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} est combinaison des a_m et des coefficients de $R(X)$ qui sont dans A, les uns par hypothèse, les autres par construction. Ainsi, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} c'est-à-dire $\alpha^n \,.\, b_q$ appartient à A et, A étant complètement intégralement clos, α appartient à A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU, B. Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, pp. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).

[2] BOURBAKI, N. Eléments de mathématique. Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).

[3] CAHEN, P.-J. Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 94, 1970, pp. 81-83.

[4] CHABERT, J.-L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 273-283.

[5] DRESS, Fr. Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, pp. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[6] FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta. Math.*, Uppsala, t. 30, 1906, pp. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).

[7] NAKAYAMA, T. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, *Proc. Imp. Acad.* Tokyo, t. 18, 1942, pp. 185-187 et pp. 233-236, et, *Proc. Japan Acad.*, t. 22, 1946, pp. 249-250.

[8] PISOT, Ch. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[9] POLYA, G. Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Ann.*, t. 77, 1916, pp. 497-513.

(Reçu le 24 février 1972).

Jean-Luc Chabert
10, Villa des Gobelins
75-Paris 13e