

## II. Bases entières.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

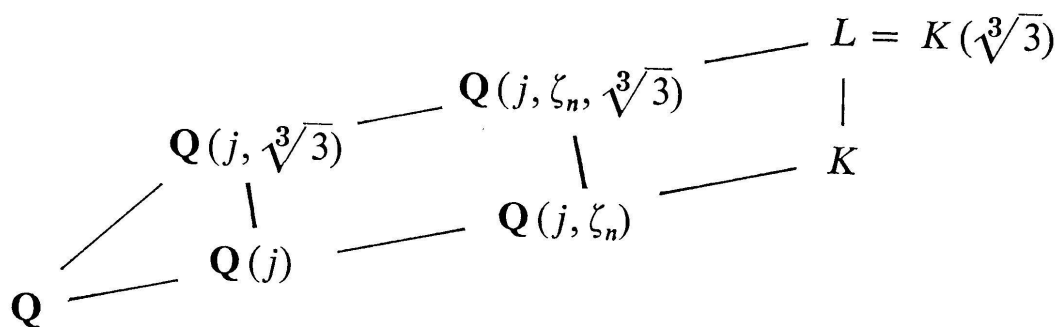
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\mathcal{P}_\alpha \supset \Delta \cap A_\alpha \supset \Delta_\alpha.$$

Donc  $\mathcal{P}_\alpha$  se ramifie dans  $L_\alpha/K_\alpha$ . Par « propagation de la non-ramification vers le haut », il existe au moins un indice  $i$  tel que pour tout  $\alpha$ ,  $(\Gamma_{v_i, \alpha} : \Gamma_{v, \alpha}) > 1$ . Pour cette valeur de  $i$ ,  $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) > 1$ , et  $\mathcal{P}$  est ramifié dans  $L/K$ .

## II. BASES ENTIÈRES.

### 1. Exemple



Soit  $K$  le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbf{Q}$ ,  $j$  et toutes les racines  $5^n$ -ièmes de l'unité; soit  $\zeta_n$  une racine primitive  $5^n$ -ième de l'unité. Le corps  $K$ , extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}$ , est une extension abélienne de  $\mathbf{Q}$ . Mais  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}$  n'est pas abélienne; donc  $L = K(\sqrt[3]{3})$  est une extension de degré 3 de  $K$ .

Les extensions  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}, \zeta_n)/\mathbf{Q}(j, \zeta_n)$  sont des extensions de Kummer. Les seuls idéaux qui peuvent se ramifier sont ceux qui divisent 3. La théorie de Kummer (cf. Hecke [6]) permet de calculer leur participation au discriminant de  $L_n/K_n$ ; on obtient:  $\Delta_n = 3^4 A_n$ . Mais comme  $\mathbf{Z}[j]$  est principal,  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}(j)$  admet une base entière,  $\{\lambda, \mu, \nu\}$ , de discriminant  $3^4$ . Donc  $L/K$  admet  $\{\lambda, \mu, \nu\}$  comme base entière.

### 2. Caractérisation des $A$ -modules $B$ de type fini.

*Proposition 3.*

*A et B étant définis au paragraphe précédent, les propositions suivantes sont équivalentes :*

*a — B est un A-module de type fini.*

*b* — Il existe une famille finie  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  d'éléments de  $B$ , et un indice  $\alpha_0 \in I$ , tels que pour tout  $\beta \geq \alpha_0$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  soit un système de générateurs du  $A_\beta$ -module  $B_\beta$ .

*c* — L'idéal discriminant  $\Delta$  de  $L/K$  est de type fini.

*a*  $\Rightarrow$  *b* — Choisissons un système fini de générateurs de  $B$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ . D'après la condition (1), il existe un indice  $\alpha_0 \in I$  tel que les  $\lambda_i$  appartiennent tous à  $B_{\alpha_0}$ . Pour  $\beta \geq \alpha_0$ , considérons le  $A_\beta$ -module  $M_\beta = A_\beta \lambda_1 + \dots + A_\beta \lambda_l$ , et montrons que  $M_\beta = B_\beta$ .

Le module  $M_\beta$  est sans torsion, de rang  $n$ , sur l'anneau de Dedekind  $A_\beta$ . Utilisons un résultat démontré par Artin dans ([1]): étant donnés  $n$  éléments  $l_i$  de  $M_\beta$  linéairement indépendants sur  $K_\beta$ , on peut trouver  $n$  idéaux fractionnaires  $\alpha_i$  de  $A_\beta$  tels que

$$M_\beta = \alpha_1 l_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n l_n.$$

Cette écriture permet de vérifier l'égalité, pour  $\gamma \geq \beta$ :

$$M_\gamma \cap B_\beta = M_\beta.$$

On peut alors définir une injection de  $B_\beta/M_\beta$  dans  $B_\gamma/M_\gamma$ . La famille  $\{B_\alpha/M_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_0}$  constitue un système inductif, de limite inductive 0. Donc, pour  $\alpha \geq \alpha_0$ ,

$$B_\alpha = M_\alpha = A_\alpha \lambda_1 + \dots + A_\alpha \lambda_l.$$

*b*  $\Rightarrow$  *c* — Supposons  $B$  de type fini. Soit encore  $\alpha_0$  l'indice intervenant dans la démonstration de *a*  $\Rightarrow$  *b*. Choisissons un idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $A_{\alpha_0}$ , et localisons en  $\mathcal{P}$ . (Nous surlignerons les localisés). Pour  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $B_\alpha$  et  $B_{\alpha_0}$  possèdent un système de générateurs commun, donc  $\overline{B_\alpha}$  et  $\overline{B_{\alpha_0}}$  ont une base commune respectivement sur  $\overline{A_\alpha}$  et  $\overline{A_{\alpha_0}}$ . Et

$$\overline{\Delta_\alpha} = \overline{\Delta_{\alpha_0}} \overline{A_\alpha}.$$

Ceci étant vrai pour tout idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $A_{\alpha_0}$ ,

$$\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha.$$

Comme on obtient une nouvelle famille d'indices vérifiant les conditions (1) en ne considérant que les indices de  $I$  supérieurs à  $\alpha_0$ , on peut conclure que

$$\Delta = \Delta_{\alpha_0} A.$$

$c \Rightarrow b \Rightarrow a$  — Soit  $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$  un système de générateurs de  $\Delta$ . Considérons un indice  $\alpha_0$  tel que  $A_{\alpha_0}$  contienne tous les  $\delta_i$ , et, pour  $\alpha \geq \alpha_0$ , posons

$$\alpha_\alpha = \delta_1 A_\alpha + \dots + \delta_l A_\alpha.$$

Comme  $\alpha_\alpha A_\beta = \alpha_\beta$  lorsque  $\beta \geq \alpha$ , on a

$$\alpha_\beta \cap \Delta_\alpha = \alpha_\alpha.$$

La limite inductive du système inductif  $\{\Delta_\alpha/\alpha_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_0}$  est nulle, donc pour  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $\Delta_\alpha = \alpha_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$ .

Si  $\{l_1, \dots, l_p\}$  est un système de générateurs du  $A_{\alpha_0}$ -module  $B_{\alpha_0}$ , considérons pour  $\alpha \geq \alpha_0$

$$M_\alpha = A_\alpha l_1 + \dots + A_\alpha l_p.$$

Grâce à l'hypothèse  $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_0} A_\alpha$ , on montre par localisation que  $M_\alpha = B_\alpha$ . Comme  $K = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha \geq \alpha_0}} K_\alpha$ , on peut donc conclure que  $B$  est un  $A$ -module de type fini.

*Cette caractérisation va nous permettre de construire une extension  $L/K$  ou  $B$  n'est pas un  $A$ -module de type fini.*

Considérons le corps  $K_n = \mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2})$ ; c'est une extension de degré  $3^n$  de  $\mathbf{Q}$ , dans laquelle 2 est totalement ramifié. Le corps  $K = \bigcup K_n$  est une extension réelle de  $\mathbf{Q}$ , donc  $L = K(i)$  est une extension de degré 2 de  $K$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Q}(i) & \text{---} & \mathbf{Q}(i, \sqrt[3]{2}) & \text{---} & \mathbf{Q}(i, \sqrt[3^n]{2}) & \text{---} & L \\ | & & | & & | & & | \\ \mathbf{Q} & \text{---} & \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) & \text{---} & \mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2}) & \text{---} & K \end{array}$$

L'indice de ramification de 2 dans  $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$  vaut 2; dans  $\mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}$ , il vaut  $3^n$ . Donc  $\mathcal{P}_n = (\sqrt[3^n]{2})$  est ramifié dans  $\mathbf{Q}(i, \sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2})$ . On voit que l'entier maximum  $x_n$  tel que la congruence

$$-1 \equiv \xi_n^2 \pmod{\mathcal{P}_n^{x_n}}$$

admette une solution dans  $A_n$  est  $3^n$ . La théorie de Kummer (cf. [6]) nous donne donc comme valeur du discriminant  $\Delta_n$  de  $\mathbf{Q}(i, \sqrt[3^n]{2})/\mathbf{Q}(\sqrt[3^n]{2})$

$$\Delta_n = \mathcal{P}_n^{3^{n+1}}.$$

Soit  $m$  un indice supérieur à  $n$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n A_m &= \mathcal{P}_m^{3^m - n} . \\ \Delta_n A_m &= \mathcal{P}_m^{3^m + 3^m - n} \\ \Delta_m &= \mathcal{P}_m^{3^m + 1} .\end{aligned}$$

Donc dès que  $m$  diffère de  $n$ ,  $\Delta_m$  contient strictement  $\Delta_n A_m$ , et  $\Delta_m$  n'est jamais l'étendu d'un discriminant d'indice inférieur. La proposition 3 permet de conclure que  $B$  n'est pas un  $A$ -module de type fini.

### 3. Critère d'Artin.

Pour généraliser le critère d'Artin, nous utiliserons un théorème démontré en 1952 par Kaplansky ([8]).

#### THÉORÈME 1 (Kaplansky)

*Soit  $R$  un domaine d'intégrité vérifiant les deux conditions suivantes :*

*. tout idéal de type fini est inversible.*

*. si  $\alpha$  est un idéal non nul de type fini de  $R$ ,  $R/\alpha$  est un anneau dans lequel tout idéal de type fini est principal.*

*Alors si  $M$  est un  $R$ -module sans torsion de type fini*

*a —  $M$  se représente comme somme directe d'idéaux de type fini,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .*

*b — Le rang  $n$  de  $M$ , et la classe du produit  $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$  dans une représentation de  $M$  comme somme directe d'idéaux constituent un système complet d'invariants pour  $M$ .*

On voit facilement que les anneaux  $A$  qui nous intéressent vérifient les hypothèses du théorème 1. Si l'on suppose que  $B$  est de type fini sur  $A$ , on peut trouver des idéaux  $\alpha_i$  de  $A$  tels que

$$B = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n .$$

On peut donc conclure que pour que  $B$  soit un  $A$ -module libre, il faut et il suffit que l'idéal  $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$  soit principal.

#### Critère d'Artin.

*Soit  $D$  le discriminant d'une base  $\{\xi_i\}$  de  $L/K$ , et soit  $\Delta$  l'idéal discriminant de  $L/K$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

*a* —  $B$  est un  $A$ -module libre.

*b* —  $\Delta/(D)$  est le carré d'un idéal principal.

Soit  $\{\xi_i\}$  une base de  $L/K$ . Supposons  $B$  de type fini sur  $A$ ; d'après le théorème 1, on peut écrire

$$B = \alpha_1 \xi_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n \xi_n$$

où les  $\alpha_i$  sont des idéaux de type fini de  $A$ . Posons

$$\alpha_i^\alpha = \alpha_i \cap A_\alpha.$$

$$B_\alpha = \alpha_1^\alpha \xi_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n^\alpha \xi_n$$

pour tout indice  $\alpha$  tel que  $L_\alpha$  contienne les  $\xi_i$ . Utilisons les résultats d'Artin ([1]) pour  $L_\alpha/K_\alpha$ :

$$\Delta_\alpha = (\alpha_1^\alpha)^2 \times \dots \times (\alpha_n^\alpha)^2 D.$$

Comme  $\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_\alpha$ ,  $\Delta = (\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n)^2 D$ , et le critère est une conséquence immédiate du théorème 1.

### III. ARITHMÉTIQUE DANS CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER.

#### 1. Anneaux et corps de type $J$ .

Dans un article de 1952, P. Jaffard ([7]) construit une théorie de la divisibilité pour des anneaux plus généraux que les anneaux de Dedekind. Il procède de la manière suivante: soient  $A$  un anneau commutatif unitaire, et  $J$  l'ensemble de ses idéaux. On peut munir  $J$  d'une relation d'équivalence:

les idéaux  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  sont équivalents, si tout idéal de  $J$ , étranger à l'un, est étranger à l'autre.

On appelle « strie » une classe d'équivalence de  $J$  pour cette relation; une strie maximale est une strie qui contient un idéal maximal; celui-ci est d'ailleurs unique.

#### THÉORÈME 2 (Jaffard).

*Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire, vérifiant les deux conditions suivantes :*

\* *L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux distincts se réduit à l'idéal  $\{0\}$ .*