III. Arithmétique dans certains anneaux de Prüfer.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

a — B est un A-module libre.

b — $\Delta/(D)$ est le carré d'un idéal principal.

Soit $\{\xi_i\}$ une base de L/K. Supposons B de type fini sur A; d'après le théorème 1, on peut écrire

$$B = \mathfrak{a}_1\xi_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n\xi_n$$

où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux de type fini de A. Posons

$$\mathfrak{a}_i^\alpha = \mathfrak{a}_i \cap A_\alpha .$$

$$B_\alpha = \mathfrak{a}_1^\alpha\xi_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n^\alpha\xi_n$$

pour tout indice α tel que L_α contienne les ξ_i. Utilisons les résultats d'Artin ([1]) pour L_α/K_α:

$$\Delta_\alpha = (\mathfrak{a}_1^\alpha)^2 \times \ldots \times (\mathfrak{a}_n^\alpha)^2 D .$$

Comme $\Delta = \bigcup_{\alpha\in I} \Delta_\alpha$, $\Delta = (\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n)^2\, D$, et le critère est une conséquence immédiate du théorème 1.

III. Arithmétique dans certains anneaux de Prüfer.

1. *Anneaux et corps de type J.*

Dans un article de 1952, P. Jaffard ([7]) construit une théorie de la divisibilité pour des anneaux plus généraux que les anneaux de Dedekind. Il procède de la manière suivante: soient A un anneau commutatif unitaire, et J l'ensemble de ses idéaux. On peut munir J d'une relation d'équivalence:

les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont équivalents, si tout idéal de J, étranger à l'un, est étranger à l'autre.

On appelle « strie » une classe d'équivalence de J pour cette relation; une strie maximale est une strie qui contient un idéal maximal; celui-ci est d'ailleurs unique.

Théorème 2 (Jaffard).

Soit A un anneau commutatif unitaire, vérifiant les deux conditions suivantes :

** L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux distincts se réduit à l'idéal* $\{0\}$.

* *tout idéal premier non nul et différent de A appartient à une strie maximale.*

Alors tout idéal $\mathfrak{a}$ *de A se décompose de manière unique en un produit d'idéaux,* $\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n$, *chaque* $\mathfrak{a}_i$ *appartenant à une strie maximale.*

Définition 3.

Soient A un anneau vérifiant les hypothèses du théorème 2, et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Etant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de A, nous appellerons *composante de* $\mathfrak{a}$ *relativement à* $\mathfrak{m}$ l'idéal de la strie de $\mathfrak{m}$ qui intervient dans la décomposition de $\mathfrak{a}$.

Nous dirons qu'une *strie maximale est finie* si l'idéal maximal qu'elle contient est de type fini; tout idéal d'une strie finie est de type fini. Dans le cas contraire, nous dirons qu'une strie maximale est non finie.

Pour être complètement renseigné sur la divisibilité des idéaux, il faut supposer de plus que A est un anneau de Prüfer uniforme (c'est-à-dire un anneau de Prüfer où deux idéaux premiers de J, différents de $\{0\}$, sont toujours premiers entre eux). Pour ces anneaux, on peut définir une décomposition des idéaux fractionnaires suivant les stries maximales, et démontrer le

THÉORÈME 3 (Jaffard).

Soit A un anneau de Prüfer uniforme, satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Si $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux idéaux fractionnaires de A, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a — il existe un idéal $\mathfrak{c}$ *tel que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

b — pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ *de A tel que la composante de* $\mathfrak{a}$ *relative à* $\mathfrak{m}$ *soit finie, la composante de* $\mathfrak{b}$ *relative à* $\mathfrak{m}$ *est également finie.*

Définition 4.

Soient D un anneau de Dedekind, et A la clôture intégrale de D dans une extension algébrique infinie du corps des quotients de D. Nous dirons que *A est un anneau de type J* si l'ensemble des idéaux premiers de A au-dessus d'un idéal premier $\mathscr{P}$ de D est fini.

Il est clair qu'un anneau de type J est un anneau de Prüfer uniforme, qui vérifie les hypothèses du théorème 2.

Un corps K *est un corps de type* J s'il est corps des quotients d'un anneau de type J.

2. *Exemple de corps de type J.*

Soit k un corps de nombres. On dit que K est une Γ-extension de k si K/k est galoisienne, et si Gal (K/k) est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Les extensions intermédiaires d'une Γ-extension K/k sont donc des extensions cycliques de degré p^n de k. Soit alors $\mathscr{P}$ un idéal premier de k; son corps de décomposition est soit K, soit un corps de nombres.

Proposition 4.

Toute Γ-extension cyclotomique d'un corps de nombres est un corps de type J.

Soit ζ_n une racine primitive p^n-ième de l'unité. Notons L_n le corps $k(\zeta_n)$. Par définition, la Γ-extension cyclotomique K d'un corps de nombres k, associée au nombre premier p est la Γ-extension contenue dans $L = \underset{n}{U} L_n$.

Si k contient les racines p-ièmes de l'unité, alors $K = L$. Sinon, $K = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_n$, K_n étant la sous-extension de degré p^{n-1} de L_n, et $[L_n : K_n]$ divise $p - 1$.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
L_n = k(\zeta_n) \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & K \\
& K_n \arrow[ur, dash] & \\
k \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}
$$

. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de k ne divisant pas p. La théorie du corps de classes [4] nous dit que $\mathfrak{q}$ se décompose totalement dans l'extension L_n/k si et seulement si $\mathfrak{q}$ appartient au groupe d'Artin H_n de L_n/k. L'image de $\mathfrak{q}$ par l'automorphisme de Frobenius est l'élément σ de Gal (L_n/k) défini par:

$$\sigma\zeta_n = \zeta_n^{N(\mathfrak{q})} .$$

Donc $\mathfrak{q}$ est totalement décomposé dans L_n/k si et seulement si

$$N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \mod p^n .$$

Comme $[L_n:K_n]$ divise $p - 1$, pour que $\mathfrak{q}$ soit totalement décomposé dans K_n/k, il faut et il suffit qu'il le soit dans L_n/k. Et l'on obtient que le corps de décomposition de $\mathfrak{q}$ dans K/k est de degré fini sur k.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K = k\Gamma \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\Gamma \arrow[dr, dash] & & k \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{Q} &
\end{tikzcd}$$

. Supposons maintenant que $\mathscr{P}$ divise p, et soit Γ la Γ-extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ associée à p. On sait que p est totalement ramifié dans $\Gamma/\mathbf{Q}$. En utilisant la branche $\mathbf{Q} . k . K$ du diagramme, on obtient encore que le corps de décomposition de $\mathscr{P}$ est de degré fini sur k.

Remarque: On pourrait chercher à généraliser la proposition 4 au cas d'une Γ-extension quelconque d'un corps de nombres. En fait, ce résultat est faux. Montrons-le à partir d'un exemple dû à Hasse et décrit par B. Martel dans [10]. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ un corps quadratique imaginaire. Définissons le groupe de congruences H_n modulo p^{n+1} comme groupe des idéaux principaux (x) de k, premiers à p, et tels qu'il existe un rationnel r vérifiant $x \equiv r$ modulo p^{n+1}. Si L_n est le corps de classes sur k associé à H_n, et K_n la p-extension maximale de k dans L_n, $K = \bigcup_n K_n$ est une Γ-extension de k linéairement disjointe sur k de la Γ-extension cyclotomique. F. Bertrandias nous a fait remarquer que si q est un nombre premier rationnel inerte dans $k/\mathbf{Q}$, et distinct de p, l'idéal (q) de k appartient à H_n quel que soit n. Donc (q) est totalement décomposé dans K/k.

Plus généralement, tout corps de nombres qui contient une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$ admet une Γ-extension qui n'est pas de type J.

IV. Bases entières d'une extension quadratique.

1. *Critère d'existence d'une base entière.*

H. B. Mann précise dans [9] le critère d'Artin, lorsque L/K est une extension quadratique du corps des quotients K d'un anneau de Dedekind. Il énonce les deux théorèmes suivants: