

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ARITHMÉTIQUE DANS DES EXTENSIONS FINIES DU CORPS DES QUOTIENTS DE CERTAINS ANNEAUX DE PRÜFER  
**Autor:** Moser, Nicole  
**Kapitel:** IV. Bases entières d'une extension quadratique.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45366>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

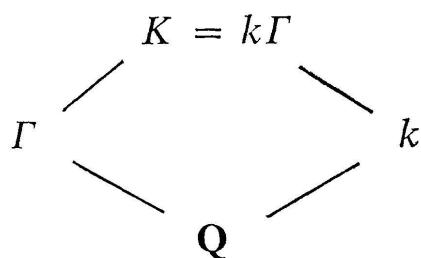
### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Comme  $[L_n:K_n]$  divise  $p - 1$ , pour que  $q$  soit totalement décomposé dans  $K_n/k$ , il faut et il suffit qu'il le soit dans  $L_n/k$ . Et l'on obtient que le corps de décomposition de  $q$  dans  $K/k$  est de degré fini sur  $k$ .



. Supposons maintenant que  $\mathcal{P}$  divise  $p$ , et soit  $\Gamma$  la  $\Gamma$ -extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}$  associée à  $p$ . On sait que  $p$  est totalement ramifié dans  $\Gamma/\mathbf{Q}$ . En utilisant la branche  $\mathbf{Q} . k . K$  du diagramme, on obtient encore que le corps de décomposition de  $\mathcal{P}$  est de degré fini sur  $k$ .

Remarque: On pourrait chercher à généraliser la proposition 4 au cas d'une  $\Gamma$ -extension quelconque d'un corps de nombres. En fait, ce résultat est faux. Montrons-le à partir d'un exemple dû à Hasse et décrit par B. Martel dans [10]. Soit  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$  un corps quadratique imaginaire. Définissons le groupe de congruences  $H_n$  modulo  $p^{n+1}$  comme groupe des idéaux principaux  $(x)$  de  $k$ , premiers à  $p$ , et tels qu'il existe un rationnel  $r$  vérifiant  $x \equiv r$  modulo  $p^{n+1}$ . Si  $L_n$  est le corps de classes sur  $k$  associé à  $H_n$ , et  $K_n$  la  $p$ -extension maximale de  $k$  dans  $L_n$ ,  $K = \bigcup_n K_n$  est une  $\Gamma$ -extension de  $k$  linéairement disjointe sur  $k$  de la  $\Gamma$ -extension cyclotomique. F. Bertrandias nous a fait remarquer que si  $q$  est un nombre premier rationnel inerte dans  $k/\mathbf{Q}$ , et distinct de  $p$ , l'idéal  $(q)$  de  $k$  appartient à  $H_n$  quel que soit  $n$ . Donc  $(q)$  est totalement décomposé dans  $K/k$ .

Plus généralement, tout corps de nombres qui contient une extension quadratique imaginaire de  $\mathbf{Q}$  admet une  $\Gamma$ -extension qui n'est pas de type  $J$ .

#### IV. BASES ENTIÈRES D'UNE EXTENSION QUADRATIQUE.

##### 1. Critère d'existence d'une base entière.

H. B. Mann précise dans [9] le critère d'Artin, lorsque  $L/K$  est une extension quadratique du corps des quotients  $K$  d'un anneau de Dedekind. Il énonce les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 4 (Mann).

*Soit  $L$  une extension quadratique d'un corps  $K$  de caractéristique différente de 2. Pour que  $B$  soit  $A$ -libre, il faut et il suffit que l'idéal  $\Delta_{L/K}$  soit principal, et engendré par  $D$  tel que  $L = K(D^{1/2})$ .*

THÉORÈME 5 (Mann).

*Soit  $L = K(a^{1/2})$  une extension quadratique d'idéal discriminant  $\Delta$ . Posons  $(a) = \alpha^2 c$  et  $\Delta = \delta^2 c'$ , ou  $c$  et  $c'$  sont des idéaux entiers sans facteur carré. L'extension  $L/K$  admet une base entière si et seulement si  $c = c'$  et  $\alpha \sim \delta$  (modulo les idéaux principaux).*

Le théorème 4 se généralise facilement au cas où  $K$  est une extension infinie du corps des quotients d'un anneau de Dedekind, de caractéristique différente de 2. Reprenons les notations du début. Supposons que  $L$  soit une extension quadratique de  $K$ , de discriminant un idéal principal engendré par l'entier  $D_1$ . Il existe un indice  $\alpha_0$  tel que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $D_1$  appartienne à  $A_\alpha$ .

Supposons que  $L/K$  admette une base entière  $\{\lambda, \mu\}$ . Considérons un indice  $\alpha \geq \alpha_0$ , tel que  $B_\alpha$  contienne  $\lambda$  et  $\mu$  :  $\{\lambda, \mu\}$  est une base entière de  $L_\alpha/K_\alpha$ , et le théorème 4 donne  $L_\alpha = K_\alpha(D^{1/2})$ ,  $D$  étant un générateur du discriminant. D'où  $L = K(D^{1/2})$ .

Inversement, si  $L = K(D_1^{1/2})$ ,  $L_\alpha = K_\alpha(D_1^{1/2})$ . En appliquant le théorème 4 aux extensions  $L_\alpha/K_\alpha$  telles que  $\alpha \geq \alpha_0$ , on obtient que  $L/K$  admet une base entière.

Pour généraliser le théorème 5, il nous faut une théorie de la divisibilité. C'est pourquoi nous supposerons, pour le reste de ce paragraphe, que  $K$  est un corps de type  $J$ .

*Lemme.*

*Soient  $p$  un entier, et  $\alpha$  un idéal de  $K$ .  $\alpha$  se décompose de manière unique en produit*

$$\alpha = \mathfrak{b}^p \mathfrak{c} \mathfrak{c}'$$

$\mathfrak{b}$ : idéal fractionnaire dont toutes les composantes non triviales sont dans des stries finies.

$\mathfrak{c}$ : idéal entier sans facteur puissance  $p$ -ième, dont toutes les composantes non-triviales sont dans des stries finies.

$c'$ : idéal dont toutes les composantes non triviales sont dans des stries non finies.

L'idéal  $a$  se décompose de manière unique en produit d'idéaux  $a_i$ :

$$a = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_l$$

chaque  $a_i$  appartenant à une strie maximale. Notons  $m_i$  l'idéal maximal équivalent à  $a_i$ , et ordonnons les indices de manière que  $m_1, \dots, m_j$  soient de type fini, et que  $m_{j+1}, \dots, m_l$  ne le soient pas. Posons  $m_i \cap k = \mathcal{P}_i$ .

Puisque  $K$  est de type  $J$ , il n'existe dans  $K$  qu'un nombre fini d'idéaux premiers au-dessus de  $\mathcal{P}_i$ . Lorsque  $1 \leq i \leq j$ , on peut donc trouver un indice  $\alpha_i$  tel que l'idéal  $\mathcal{P}_i$  reste inerte dans  $K/K_{\alpha_i}$ . Posons alors  $\chi = K_{\alpha_1} \dots K_{\alpha_j}$ ; c'est une extension finie de  $k$ . Et dans  $\chi$ , l'idéal  $(\prod_{i=1}^j a_i) \cap \chi$  se décompose de manière unique en:

$$\left(\prod_{i=1}^j a_i\right) \cap \chi = b_1^p c_1$$

$c_1$  idéal entier sans facteur puissance  $p$ -ième. L'idéal  $c_1$  reste inerte dans  $K/\chi$ , donc son étendu est sans facteur puissance  $p$ -ième.

On peut choisir alors comme idéaux  $b, c$  et  $c'$ :  $b = b_1 A$ ,  $c = c_1 A$  et  $c' = a_{j+1} \times \dots \times a_l$ .

L'unicité de cette décomposition provient de l'unicité de la décomposition en produit d'idéaux appartenant à des stries maximales.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat analogue au théorème 5:

*Proposition 5.*

Soient  $K$  un corps de type  $J$ , de caractéristique différente de 2, et  $L = K(a^{1/2})$  une extension quadratique d'idéal discriminant  $\Delta$ . Utilisons le lemme pour écrire

$$(a) = \alpha^2 b b', \quad \Delta = c^2 \delta \delta'.$$

Le  $A$ -module  $B$  est libre si et seulement si l'on peut trouver  $\alpha \in K^*$  tel que

$$c^2 \delta' = (\alpha^2) \alpha^2 b' \quad \text{et} \quad b = \delta.$$

En effet, si  $b = \delta$  et  $c^2 \delta' = (\alpha^2) \alpha^2 b'$ ,  $\Delta = (\alpha^2) \alpha^2 b' b = (a \alpha^2)$ . Le discriminant de l'extension  $L/K$  est principal, de générateur  $a \alpha^2$ , et  $L = K((a \alpha^2)^{1/2})$ . La généralisation du théorème 4 permet de conclure que  $B$  est  $A$ -libre.

Inversement, si  $B$  est  $A$ -libre, l'idéal  $\Delta$  est principal; en vertu du même théorème, il est engendré par  $D$  tel que  $L = K(D^{1/2})$ . Donc

$$a^{1/2} = x + yD^{1/2} \quad (x \text{ et } y \text{ éléments de } K).$$

Elevons au carré:

$$a = x^2 + y^2D + 2xyD^{1/2}.$$

Nécessairement  $x = 0$  et  $a = y^2D$ .

$$a^2 \mathfrak{b} \mathfrak{b}' = y^2 c^2 \delta \delta'.$$

D'après le lemme

$$\mathfrak{b} = \delta \quad \text{et} \quad a^2 \mathfrak{b}' = (y^2) c^2 \delta'.$$

## 2. Détermination explicite d'une base entière.

Plaçons-nous dans le cas particulier où  $K$  est une extension infinie de  $\mathbf{Q} : K = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ , avec  $[K_n : \mathbf{Q}] < \infty$ . Soit  $L = K(\sqrt{a})$  une extension quadratique de  $K$ . Supposons qu'elle admette une base entière  $\{\lambda, \mu\}$ : il existe alors un indice  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\{\lambda, \mu\}$  soit une base entière de  $L_n = K_n(\sqrt{a})/K_n$ . Nous sommes donc ramenés à la recherche d'une base entière d'une extension quadratique d'un corps de nombres.

Ce problème a été résolu par Fröhlich (Discriminants of algebraic number fields [5]). Il montre que lorsqu'on connaît l'existence d'une base entière, on peut trouver un générateur  $d$  de l'idéal discriminant, et un entier  $\beta$  tel que

$$d - \beta^2 \equiv 0 \text{ modulo } 4.$$

Comme base entière, on trouve alors  $\left\{1, \frac{\beta + \sqrt{d}}{2}\right\}$ .

## 3. Une condition suffisante d'existence d'une base normale.

*Proposition 6.*

*Soit  $L$  une extension quadratique d'un corps de nombres  $K$ . Pour que l'anneau des entiers  $B$  de  $L$  admette une  $A$ -base normale, il suffit que  $B$  soit  $A$ -libre, que  $B/A$  soit modérément ramifiée, et que 2 soit totalement décomposé dans  $K/\mathbf{Q}$ .*

Il est évidemment nécessaire qu'il existe une base entière. On sait aussi que la condition « être modérément ramifiée » est nécessaire pour toute extension finie d'un corps de nombres. (cf. J. Martinet [11]).

Supposons donc que  $L/K$  admette une base entière; d'après le paragraphe précédent, nous pouvons la prendre de la forme  $\{1, \frac{\beta + \sqrt{d}}{2}\}$ , où  $d$  est un générateur de l'idéal discriminant, et  $\beta$  un entier tel que  $\beta^2 - d \equiv 0 \pmod{4}$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $L/K$  admette une base normale est qu'il existe deux éléments  $x$  et  $y$  de  $A$  tels que:

$$\left( \begin{vmatrix} x + y \frac{\beta + \sqrt{d}}{2} & x + y \frac{\beta - \sqrt{d}}{2} \\ x + y \frac{\beta - \sqrt{d}}{2} & x + y \frac{\beta + \sqrt{d}}{2} \end{vmatrix} 2 \right) = (d)$$

$$(y^2 d (2x + y\beta)^2) = (d).$$

Comme  $x$ ,  $y$ ,  $d$  et  $\beta$  sont des entiers, il faut et il suffit que  $y$  et  $2x + y\beta$  soient des unités de  $A$ .

En particulier,  $2x + y\beta$  doit être une unité  $\mathcal{P}$ -adique pour tout idéal  $\mathcal{P}$  divisant 2. Donc  $\beta$  doit être une unité  $\mathcal{P}$ -adique. Comme  $d \equiv \beta^2 \pmod{4}$ , on obtient que  $d$  doit être une unité  $\mathcal{P}$ -adique pour tout  $\mathcal{P} \mid 2$ . Cela équivaut à la ramification modérée de  $B/A$ .

Supposons maintenant 2 totalement décomposé dans  $K/\mathbb{Q}$ . Si  $\mathcal{P}$  est un idéal premier de  $A$  divisant 2,  $A/\mathcal{P}$  est un corps à deux éléments. Choisissons un élément  $\pi$  dans  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^2$ . Tout élément de  $A/\mathcal{P}^2$  peut-être représenté par

$$m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pi \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}.$$

Si  $m$  est une unité  $\mathcal{P}$ -adique,  $\varepsilon_1 = 1$ . Alors

$$m^2 = 1 + 2\varepsilon_2 \pi + \varepsilon_2^2 \pi^2 \equiv 1 \pmod{\mathcal{P}^2}.$$

Tous les carrés d'unités  $\mathcal{P}$ -adiques sont congrus à 1 mod  $\mathcal{P}^2$ . En particulier

$$\beta^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Comme valeur de  $\beta$ , on peut choisir 1. Prenons alors  $x = 0$ ,  $y = 1$ :  $B$  admet une  $A$ -base normale engendrée par  $\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ .

*Corollaire.*

Soit  $L = K(a^{1/2})$  une extension quadratique d'une extension infinie  $K$  de  $\mathbf{Q}$ , de type  $J$ . Pour que l'anneau des entiers  $B$  de  $L$  admette une  $A$ -base normale, il suffit que

- .  $B$  soit  $A$ -libre
- .  $B/A$  soit modérément ramifiée
- . il existe dans  $K$  une extension finie  $k$  de  $\mathbf{Q}$  telle que  $[k(a^{1/2}):k] = 2$ ,

que le discriminant de  $L/K$  soit l'étendu du discriminant de  $k(a^{1/2})/k$ , et que 2 soit totalement décomposé dans  $k/\mathbf{Q}$ .

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de voir que  $k$  vérifie les hypothèses de la proposition 6. L'extension  $k(a^{1/2})/k$  admet une base entière, grâce à la proposition 5. Elle est modérément ramifiée: son discriminant est premier à 2, comme celui de  $L/K$ . Enfin 2 est totalement décomposé dans  $k/\mathbf{Q}$ .

Exemple: Considérons le corps  $K = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \zeta_n)$  où  $\zeta_n$  est une racine primitive  $3^n$ -ième de l'unité. Si  $\theta = 1 + 4\sqrt{-7}$ ,  $L = K(\theta^{1/2})$  est une extension quadratique de  $K$ .

Déterminons le discriminant de  $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ . L'idéal premier  $(1 + 4\sqrt{-7})$  se ramifie dans l'extension considérée; il figure donc avec l'exposant 1 dans le discriminant. Les seuls idéaux distincts de  $(1 + 4\sqrt{-7})$  qui peuvent se ramifier dans  $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$  sont les idéaux au-dessus de 2. Or, dans  $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ ,

$$(2) = \left( \frac{1 + \sqrt{-7}}{2} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{-7}}{2} \right).$$

D'autre part

$$1 + 4\sqrt{-7} \equiv \left( \frac{1 + 3\sqrt{-7}}{2} \right)^2 \pmod{\left( \frac{1 + \sqrt{-7}}{2} \right)^2}$$

et

$$1 + 4\sqrt{-7} \equiv \left( \frac{1 + \sqrt{-7}}{2} \right)^2 \pmod{\left( \frac{1 - \sqrt{-7}}{2} \right)^2}.$$

D'après la théorie de Kummer, les idéaux au-dessus de 2 sont non ramifiés dans l'extension  $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ ; le discriminant de cette extension vaut exactement  $(1+4\sqrt{-7})$ . Le théorème 5 permet d'affirmer que  $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$  vérifie toutes les hypothèses de la proposition 6: cette extension admet donc une base normale entière, engendrée par  $\frac{1 + \sqrt{1+4\sqrt{-7}}}{2}$ .

On vérifie aisément que le discriminant de  $L/K$  est l'étendu de celui de  $\mathbf{Q}(\theta^{1/2})/\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ . Donc  $L/K$  admet aussi une base normale entière engendrée par  $\frac{1 + \sqrt{1+4\sqrt{-7}}}{2}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN, E. Questions de base minimale dans la théorie des nombres algébriques. *Coll. Int. CNRS*, vol. 24 (1950), pp. 19-20.
- [2] BOURBAKI, N. *Algèbre commutative*. Chap. 7, Hermann, Paris.
- [3] ——— *Algèbre commutative*. Chap. 6, Hermann, Paris.
- [4] CHEVALLEY, C. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *Journal of the Fac. of Science, Tokyo*, vol. 2, part. 9 (1933).
- [5] FRÖHLICH, A. Discriminants of algebraic number fields. *Math. Zeitschr.* 74, pp. 18-28 (1960).
- [6] HECKE, E. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*. Leipzig (1923). Réimpression: New York (1948).
- [7] JAFFARD, P. Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. *Bull. Soc. Math. de France*, vol. 80 (1952), pp. 61-94.
- [8] KAPLANSKY, J. Modules over Dedekind rings and valuation rings. *Trans. AMS*, vol. 72 (1952), pp. 327-340.
- [9] MANN, H. B. On integral bases. *Proc. AMS*, vol. 9 (1958), pp. 167-172.
- [10] MARTEL, B.  $\Gamma$ -extensions d'un corps quadratique imaginaire. Séminaire Th. Nb, Grenoble, fév. 1971.
- [11] MARTINET, J. Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre  $2p$ . *Ann. Inst. Fourier*, tome 19, fasc. 1 (1969), pp. 1-79.
- [12] SAMUEL, P. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, Paris 1967.
- [13] SERRE, J.-P. *Corps locaux*. Hermann, Paris 1968.

Reçu le 10 décembre 1971

Nicole Moser

Institut de Mathématiques Pures

B.P. 116

38 — St-Martin-d'Hères, France