

# SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

Autor(en): **Mauclaire, Jean-Loup**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45367>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

*En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.*

Soit  $f$  une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe  $l \in \mathbf{C}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$ , alors*  
$$f(n) = \frac{l}{\text{Log } 2} \text{Log } n .$$

2. *S'il existe  $M \in \mathbf{R}^+$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $|f(2n+1) - f(n)| \leq M$ , alors  $f(n) = C \text{Log } n + g(n)$ , où  $C$  est une constante et où  $g$  est une fonction additive bornée.*

## 1. DÉMONSTRATION DE 1.

1.1. Soit  $m \in \mathbf{N}^*$ . On notera  $S_k(m) = \frac{2^k m^k - 1}{2m - 1}$  pour  $k$  entier  $\geq 1$ .

D'après notre hypothèse, on a, pour  $k$  entier  $\geq 2$ :

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + m S_{k-1}(m)) = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty);$$

Or  $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$ . Comme  $f$  est additive,

$$f(2^{k-1} m^{k-1} n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$\begin{aligned} f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m) \\ = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^k \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\} \\ = (k-1)l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn + 1) - (k-1)f(m) = (k-1)l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn + 1) - f(mn) = l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1)f(m) = kl + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

On pose alors  $n = S_k(m) \cdot (2m S_k(m) q + 1)$ . D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m) [2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1].$$

Or

$$(S_k(m), 2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1) = (S_k(m), 2^k m^k + 1) = 1.$$

On a donc:

$$(\alpha) \quad f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1).$$

Ensuite, on remarque que  $mn = m S_k(m) \cdot (2m S_k(m) q + 1)$  et que  $(m, S_k(m)) = (2m S_k(m) q + 1, S_k(m)) = (2m S_k(m) q + 1, m) = 1$ .

On obtient donc:

$$(\beta) \quad f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2m S_k(m) q + 1).$$

En substituant les deux relations  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  dans (A), on obtient:

(A')

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1] - kf(m) - f(2m S_k(m) q + 1) \\ = kl + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1] - f[2^{k-1} m^k (2m S_k(m) q + 1)] \\ = l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (A'), on a:

$$\begin{aligned} f[2^{k-1} m^k (2m S_k(m) q + 1)] - kf(m) - f(2m S_k(m) q + 1) \\ = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Comme

$$(2^{k-1}m^k, 2mS_k(m)q + 1) = 1,$$

on a

$$f[2^{k-1}m^k(2mS_k(m)q + 1)] = f(2^{k-1}m^k) + f(2mS_k(m)q + 1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1).$$

*Conclusion 1:* si  $m \in \mathbf{N}^*$ , si  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 2$ , alors:

$$(I) \quad f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l.$$

1.2. — a) Faisant  $m = 1$  dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1)l \quad \text{pour} \quad k \geq 2.$$

En particulier, pour  $k = 2$ ,  $f(2) = l$ . On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = kf(2) = kl \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

— b) Soit maintenant  $p$  un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant  $m = p$  dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = kf(p).$$

*Conclusion 2:*  $f$  est complètement additive.

1.3. Comme  $f$  est complètement additive, et que  $l = f(2)$ , notre hypothèse initiale prend la forme  $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$ , ( $n \rightarrow +\infty$ ). On remarque alors que  $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n)+1]$ , et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2f(2n+1).$$

On obtient donc:

$$2f(2n+1) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \quad \text{et} \quad f(4n^2 + 4n) = 2f(2) \\ + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdős [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour  $n = 2$ ,  $f(2) = C \log 2 = l$ , donc  $C = \frac{l}{\log 2}$ .

## 2. DÉMONSTRATION DE 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme  $rl + o(1)$  seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k$  entier  $\geq 2$ ,

$$(I') \quad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leq (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour  $k = 1$ .

2.1.1. Prenant  $m = 2^{k'-1}$ , on voit que, pour  $k$  et  $k' \geq 1$ ,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leq (k+1)M.$$

En échangeant  $k$  et  $k'$ , on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient  $k$  et  $k' \geq 1$ ,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k+k'+2)M,$$

c'est-à-dire :

$$(a) \quad \left| \frac{f(2^{k'-1})}{k'} - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leq \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{2}{kk'} \right) M.$$

Ceci montre que la suite  $\left\{ \frac{f(2^{k-1})}{k} \right\}$  est une suite de Cauchy. Elle tend donc vers une limite finie, soit  $\lambda$ .

Comme  $\frac{f(2^k)}{k} = \frac{f(2^k)}{k+1} \times \frac{k+1}{k}$ , on voit que  $\frac{f(2^k)}{k}$  tend vers  $\lambda$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Il est à noter que, si dans (a) on fait tendre  $k'$  vers  $+\infty$  avec  $k$  fixe, on obtient :

$$\left| \lambda - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leq \frac{M}{k},$$

c'est-à-dire :

$$(b) \quad |f(2^{k-1}) - k\lambda| \leq M.$$

2.1.2. Si maintenant on prend  $m$  impair dans (I'), on obtient :

$$|f(2^{k-1}) + f(m^k) - kf(m)| \leq (k+1)M,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |f(m^k) - kf(m)| &\leq (k+1)M + |f(2^{k-1})| \\ &\leq (k+1)M + k|\lambda| + M, \quad \text{d'après (b),} \\ &\leq k \left( \left( 1 + \frac{2}{k} \right) M + |\lambda| \right) \\ &\leq kM', \end{aligned}$$

où  $M' = 3M + |\lambda|$ .

En remplaçant  $m$  par  $m^{k'}$  ( $k' \geq 1$ ), on obtient :

$$|f(m^{kk'}) - kf(m^{k'})| \leq kM'.$$

En intervertissant  $k$  et  $k'$ , on a :

$$|f(m^{kk'}) - k'f(m^k)| \leq k'M'.$$

Il résulte de là que, quel que soit  $m$  impair, et quels que soient  $k$  et  $k' \geq 1$ , on a :

$$|kf(m^{k'}) - k'f(m^k)| \leq (k+k')M',$$

c'est-à-dire :

$$(c) \quad \left| \frac{f(m^{k'})}{k'} - \frac{f(m^k)}{k} \right| \leq \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) M'.$$

Ceci montre que, pour chaque  $m$  impair, la suite  $\left\{ \frac{f(m^k)}{k} \right\}$  est une suite de Cauchy, et tend donc vers une limite finie.

2.2. On voit que, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{f(m^k)}{k}$  tend vers une limite finie

quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

On vient de le montrer dans le cas où  $m$  est impair. Si maintenant  $m$  est pair, on peut écrire :

$$m = 2^\alpha m', \quad \text{avec } \alpha \geq 1 \quad \text{et } m' \text{ impair.}$$

On a alors :

$$\frac{f(m^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha} m'^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha})}{k} + \frac{f(m'^k)}{k} = \alpha \cdot \frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha} + \frac{f(m'^k)}{k}.$$

Le dernier terme tend vers une limite finie quand  $k$  tend vers  $+\infty$  puisque  $m'$  est impair. D'autre part, d'après ce que l'on a vu au § 1.1.,  $\frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha}$  tend vers  $\lambda$ .

2.3. Ceci dit, définissons les fonctions  $f^*$  et  $g_1$  sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$f^*(m) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(m^k)}{k} \quad \text{et} \quad g_1(m) = f(m) - f^*(m).$$

On a donc  $f(m) = f^*(m) + g_1(m)$ .

On va montrer successivement que  $g_1$  est bornée, puis que  $f^*$  est complètement additive, de sorte que  $g_1$  est additive.

2.3.1. Tout d'abord, si  $m$  est impair, en prenant  $k = 1$  dans (c), et faisant tendre  $k'$  vers  $+\infty$ , on obtient :

$$|f^*(m) - f(m)| \leq M', \quad \text{c'est-à-dire } |g_1(m)| \leq M'.$$

Si maintenant  $m$  est pair, d'après ce que l'on a vu plus haut, en posant :

$m = 2^\alpha m'$ , avec  $\alpha \geq 1$  et  $m'$  impair, on a :

$$f^*(m) = \alpha\lambda + f(m'),$$

d'où :

$$\begin{aligned} g_1(m) &= f(m) - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= f(2^\alpha) + f(m') - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= g_1(m') + (f(2^\alpha) - (\alpha + 1)\lambda) + \lambda. \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que l'on vient de voir et de (b), où  $k = \alpha + 1$ , on voit que :

$$|g_1(m)| \leq M' + M + |\lambda| \quad (= 4M + 2|\lambda|).$$

2.3.2.  $f^*$  est additive car, si  $(m, n) = 1$ , on a pour  $k \geq 1$

$$\frac{f((mn)^k)}{k} = \frac{f(m^k n^k)}{k} = \frac{f(m^k)}{k} + \frac{f(n^k)}{k},$$

ce qui donne en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  :  $f^*(mn) = f^*(m) + f^*(n)$ .

2.3.3.  $f^*$  est complètement additive, car, quels que soient  $p$  premier et  $\alpha > 1$ ,

$$\frac{f((p^\alpha)^k)}{k} = \alpha \frac{f(p^{\alpha k})}{\alpha k},$$

d'où, par passage à la limite  $f^*(p^\alpha) = \alpha f^*(p)$ .

2.4. Par le même procédé que dans 1.3, on démontre que  $f^*(n+1) - f^*(n) = 0(1)$ ; utilisant alors un résultat de Wirsing [2], on a :

$$f^*(n) = C \log n + g_2(n),$$

où  $C$  est une constante et  $g_2$  est une fonction additive bornée.

On a donc :

$$f(n) = C \log n + g_1(n) + g_2(n),$$

ce qui est bien le résultat cherché puisque  $g_1 + g_2$  est une fonction additive bornée.



### 3. REMARQUES

3.1. Par des procédés tout à fait analogues à ceux que l'on vient d'employer, on pourrait démontrer que:

1) Si  $f$  est additive, et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{f(2n+1) - f(2n)\} = 0$ , alors  $f(n) = C \log n$ , où  $C$  est une constante.

2) Si  $f$  est additive, s'il existe  $M \in \mathbf{R}^+$  tel que  $|f(2n+1) - f(2n)| \leq M$  pour tout  $n$ , alors  $f(n) = C \log n + g(n)$ , où  $C$  est une constante et  $g$  une fonction additive bornée.

3.2. Le problème traité ici a été posé et résolu partiellement par I. KÁTAI et F. SKOF (voir [3] et [4]).

### RÉFÉRENCES

- [1] P. ERDÖS, On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math.*, 47 (1946) pp. 4-20.
- [2] WIRSING. On a characterization of  $\log n$  as an additive function. *Proceedings of the Rome conference of Number Theory*, (1968).
- [3] I. KÁTAI, Some results and problems on the theory of additive functions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 30 (1969), Fasc. 3-4, pp. 305-312.
- [4] F. SKOF. Sulle funzioni  $f(n)$  aritmetiche additive asintotiche a  $C \log n$ . *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A.* 103 (1969), pp. 931-938.

(Reçu le 20 décembre 1971)

Jean-Loup Mauclaire  
Université catholique de l'Ouest  
B.P. 858  
49 - Angers - (France)