

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1972)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES  
**Autor:** Mauclaire, Jean-Loup  
**Kapitel:** 1. DÉMONSTRATION DE 1.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45367>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

*En remerciement à mon Professeur, M. Hubert Delange.*

Soit  $f$  une fonction additive. On se propose de démontrer les résultats suivants:

1. *S'il existe  $l \in \mathbf{C}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{f(2n+1) - f(n)\} = l$ , alors*  
$$f(n) = \frac{l}{\text{Log } 2} \text{Log } n .$$

2. *S'il existe  $M \in \mathbf{R}^+$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $|f(2n+1) - f(n)| \leq M$ , alors  $f(n) = C \text{Log } n + g(n)$ , où  $C$  est une constante et où  $g$  est une fonction additive bornée.*

## 1. DÉMONSTRATION DE 1.

1.1. Soit  $m \in \mathbf{N}^*$ . On notera  $S_k(m) = \frac{2^k m^k - 1}{2m - 1}$  pour  $k$  entier  $\geq 1$ .

D'après notre hypothèse, on a, pour  $k$  entier  $\geq 2$ :

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + m S_{k-1}(m)) = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty);$$

Or  $(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m), m) = 1$ . Comme  $f$  est additive,

$$f(2^{k-1} m^{k-1} n + m S_{k-1}(m)) = f(m) + f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)),$$

et la relation précédente devient:

$$\begin{aligned} f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2^{k-1} m^{k-1} n + S_{k-1}(m)) - f(m) \\ = l + o(1), \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^k \{f(2^j m^j n + S_j(m)) - f(2^{j-1} m^{j-1} n + S_{j-1}(m)) - f(m)\} \\ = (k-1)l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(2mn + 1) - (k-1)f(m) = (k-1)l + o(1)$$

Or:

$$f(2mn + 1) - f(mn) = l + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Notre relation peut donc s'écrire:

(A)

$$f(2^k m^k n + S_k(m)) - f(mn) - (k-1)f(m) = kl + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

On pose alors  $n = S_k(m) \cdot (2m S_k(m) q + 1)$ . D'abord:

$$2^k m^k n + S_k(m) = S_k(m) [2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1].$$

Or

$$(S_k(m), 2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1) = (S_k(m), 2^k m^k + 1) = 1.$$

On a donc:

$$(\alpha) \quad f(2^k m^k n + S_k(m)) = f(S_k(m)) + f(2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1).$$

Ensuite, on remarque que  $mn = m S_k(m) \cdot (2m S_k(m) q + 1)$  et que  $(m, S_k(m)) = (2m S_k(m) q + 1, S_k(m)) = (2m S_k(m) q + 1, m) = 1$ .

On obtient donc:

$$(\beta) \quad f(mn) = f(m) + f(S_k(m)) + f(2m S_k(m) q + 1).$$

En substituant les deux relations  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  dans (A), on obtient:

(A')

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1] - kf(m) - f(2m S_k(m) q + 1) \\ = kl + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Mais, d'après notre hypothèse:

$$\begin{aligned} f[2^k m^k (2m S_k(m) q + 1) + 1] - f[2^{k-1} m^k (2m S_k(m) q + 1)] \\ = l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (A'), on a:

$$\begin{aligned} f[2^{k-1} m^k (2m S_k(m) q + 1)] - kf(m) - f(2m S_k(m) q + 1) \\ = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Comme

$$(2^{k-1}m^k, 2mS_k(m)q + 1) = 1,$$

on a

$$f[2^{k-1}m^k(2mS_k(m)q + 1)] = f(2^{k-1}m^k) + f(2mS_k(m)q + 1)$$

et l'on obtient:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1) \quad (q \rightarrow +\infty),$$

c'est-à-dire:

$$f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l + o(1).$$

*Conclusion 1:* si  $m \in \mathbf{N}^*$ , si  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 2$ , alors:

$$(I) \quad f(2^{k-1}m^k) - kf(m) = (k-1)l.$$

1.2. — a) Faisant  $m = 1$  dans la formule (I), on a

$$f(2^{k-1}) = (k-1)l \quad \text{pour} \quad k \geq 2.$$

En particulier, pour  $k = 2$ ,  $f(2) = l$ . On en déduit immédiatement que

$$f(2^k) = kf(2) = kl \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

— b) Soit maintenant  $p$  un nombre premier impair. Compte tenu de a), en prenant  $m = p$  dans la formule (I) on obtient

$$f(p^k) = kf(p).$$

*Conclusion 2:*  $f$  est complètement additive.

1.3. Comme  $f$  est complètement additive, et que  $l = f(2)$ , notre hypothèse initiale prend la forme  $f(2n+1) - f(2n) = o(1)$ , ( $n \rightarrow +\infty$ ). On remarque alors que  $f[(2n+1)^2] = f[2(2n^2+2n)+1]$ , et donc que l'on a:

$$f[(2n+1)^2] - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Or:

$$f[(2n+1)^2] = 2f(2n+1).$$

On obtient donc:

$$2f(2n+1) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2 + 4n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \quad \text{et} \quad f(4n^2 + 4n) = 2f(2) \\ + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdős [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour  $n = 2$ ,  $f(2) = C \log 2 = l$ , donc  $C = \frac{l}{\log 2}$ .

## 2. DÉMONSTRATION DE 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme  $rl + o(1)$  seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k$  entier  $\geq 2$ ,

$$(I') \quad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leq (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour  $k = 1$ .

2.1.1. Prenant  $m = 2^{k'-1}$ , on voit que, pour  $k$  et  $k' \geq 1$ ,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leq (k+1)M.$$

En échangeant  $k$  et  $k'$ , on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient  $k$  et  $k' \geq 1$ ,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leq (k+k'+2)M,$$