2. DÉMONSTRATION DE 2.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \to +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \qquad \text{et} \qquad f(4n^2+4n) = 2f(2) + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n.$$

Pour $n = 2, f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \dfrac{l}{\log 2}$.

2. Démonstration de 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier $\geqslant 2$,

$$\text{(I')} \qquad |f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1)M.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geqslant 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leqslant (k+1)M.$$

En échangeant k et k', on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k'-1)M.$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geqslant 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k+k'+2)M,$$

c'est-à-dire:

$$(a) \qquad \left| \frac{f(2^{k'-1})}{k'} - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{2}{kk'} \right) M .$$

Ceci montre que la suite $\left\{ \frac{f(2^{k-1})}{k} \right\}$ est une suite de Cauchy. Elle tend donc vers une limite finie, soit λ.

Comme $\frac{f(2^k)}{k} = \frac{f(2^k)}{k+1} \times \frac{k+1}{k}$, on voit que $\frac{f(2^k)}{k}$ tend vers λ quand k tend vers $+\infty$.

Il est à noter que, si dans (a) on fait tendre k' vers $+\infty$ avec k fixe, on obtient:

$$\left| \lambda - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \frac{M}{k},$$

c'est-à-dire:

$$(b) \qquad | f(2^{k-1}) - k\lambda | \leqslant M .$$

2.1.2. Si maintenant on prend m impair dans (I'), on obtient:

$$| f(2^{k-1}) + f(m^k) - kf(m) | \leqslant (k+1) M ,$$

d'où:

$$\begin{aligned} | f(m^k) - kf(m) | &\leqslant (k+1) M + | f(2^{k-1}) | \\ &\leqslant (k+1) M + k | \lambda | + M , \qquad \text{d'après (b)}, \\ &\leqslant k \left(\left((1 + \frac{2}{k} \right) M + | \lambda | \right) \\ &\leqslant kM' , \end{aligned}$$

où $M' = 3M + | \lambda |$.

En remplaçant m par $m^{k'}$ ($k' \geqslant 1$), on obtient:

$$| f(m^{kk'}) - kf(m^{k'}) | \leqslant kM' .$$

En intervertissant k et k', on a:

$$| f(m^{kk'}) - k'f(m^k) | \leqslant k'M' .$$

Il résulte de là que, quel que soit m *impair*, et quels que soient k et $k' \geqslant 1$, on a:

$$|kf(m^{k'}) - k'f(m^k)| \leqslant (k+k')M',$$

c'est-à-dire:

$$\text{(c)} \qquad \left|\frac{f(m^{k'})}{k'} - \frac{f(m^k)}{k}\right| \leqslant \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}\right)M'.$$

Ceci montre que, pour chaque m impair, la suite $\left\{\frac{f(m^k)}{k}\right\}$ est une suite de Cauchy, et tend donc vers une limite finie.

2.2. On voit que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\frac{f(m^k)}{k}$ tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$.

On vient de le montrer dans le cas où m est impair. Si maintenant m est pair, on peut écrire:

$$m = 2^\alpha m', \quad \text{avec} \quad \alpha \geqslant 1 \quad \text{et} \quad m' \text{ impair.}$$

On a alors:

$$\frac{f(m^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha}m'^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha})}{k} + \frac{f(m'^k)}{k} = \alpha \,.\, \frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha} + \frac{f(m'^k)}{k}.$$

Le dernier terme tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$ puisque m' est impair. D'autre part, d'après ce que l'on a vu au § 1.1., $\frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha}$ tend vers λ.

2.3. Ceci dit, définissons les fonctions f^* et g_1 sur $\mathbf{N}^*$ par:

$$f^*(m) = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(m^k)}{k} \qquad \text{et} \qquad g_1(m) = f(m) - f^*(m).$$

On a donc $f(m) = f^*(m) + g_1(m)$.

On va montrer successivement que g_1 est bornée, puis que f^* est complètement additive, de sorte que g_1 est additive.

2.3.1. Tout d'abord, si m est impair, en prenant $k = 1$ dans (c), et faisant tendre k' vers $+\infty$, on obtient:

$$|f^*(m) - f(m)| \leqslant M', \text{ c'est-à-dire } |g_1(m)| \leqslant M'.$$

Si maintenant m est pair, d'après ce que l'on a vu plus haut, en posant:

$m = 2^{\alpha} m'$, avec $\alpha \geqslant 1$ et m' impair, on a:

$$f^*(m) = \alpha\lambda + f(m'),$$

d'où:

$$\begin{aligned} g_1(m) &= f(m) - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= f(2^{\alpha}) + f(m') - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= g_1(m') + \big(f(2^{\alpha}) - (\alpha+1)\lambda\big) + \lambda . \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que l'on vient de voir et de (b), où $k = \alpha + 1$, on voit que:

$$|g_1(m)| \leqslant M' + M + |\lambda| \quad (=4M + 2|\lambda|).$$

2.3.2. f^* est additive car, si $(m, n) = 1$, on a pour $k \geqslant 1$

$$\frac{f((mn)^k)}{k} = \frac{f(m^k n^k)}{k} = \frac{f(m^k)}{k} + \frac{f(n^k)}{k},$$

ce qui donne en faisant tendre k vers $+\infty$: $f^*(mn) = f^*(m) + f^*(n)$.

2.3.3. f^* est complètement additive, car, quels que soient p premier et $\alpha > 1$,

$$\frac{f((p^{\alpha})^k)}{k} = \alpha \frac{f(p^{\alpha k})}{\alpha k},$$

d'où, par passage à la limite $f^*(p^{\alpha}) = \alpha f^*(p)$.

2.4. Par le même procédé que dans 1.3, on démontre que $f^*(n+1) - f^*(n) = 0(1)$; utilisant alors un résultat de Wirsing [2], on a:

$$f^*(n) = C \log n + g_2(n),$$

où C est une constante et g_2 est une fonction additive bornée.

On a donc:

$$f(n) = C \log n + g_1(n) + g_2(n),$$

ce qui est bien le résultat cherché puisque $g_1 + g_2$ est une fonction additive bornée.