Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA RÉGULARITÉ DES FONCTIONS ADDITIVES
Autor: Mauclaire, Jean-Loup
Kapitel: 2. DÉMONSTRATION DE 2.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45367

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mais:

$$2f(2n+1) - 2f(2n) = o(1) \quad (n \to +\infty),$$

donc:

$$2f(2n) - f(4n^2+4n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Comme

$$2f(2n) = 2f(2) + 2f(n), \quad \text{et} \quad f(4n^2+4n) = 2f(2) + f(n) + f(n+1),$$

on obtient:

$$f(n+1) - f(n) = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Grâce à un théorème bien connu d'Erdös [1], on en déduit:

$$f(n) = C \log n .$$

Pour $n = 2, f(2) = C \log 2 = l$, donc $C = \dfrac{l}{\log 2}$.

2. Démonstration de 2.

2.1. Par des calculs semblables à ceux du § 1.1., où les égalités avec un second membre de la forme $rl + o(1)$ seront remplacées par des inégalités portant sur les modules des premiers membres, on montre que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout k entier $\geqslant 2$,

(I′) $$|f(2^{k-1}m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1)M .$$

Ceci vaut évidemment encore pour $k = 1$.

2.1.1. Prenant $m = 2^{k'-1}$, on voit que, pour k et $k' \geqslant 1$,

$$|f(2^{kk'-1}) - kf(2^{k'-1})| \leqslant (k+1)M .$$

En échangeant k et k', on a:

$$|f(2^{kk'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k'-1)M .$$

Il résulte de là que, quels que soient k et $k' \geqslant 1$,

$$|kf(2^{k'-1}) - k'f(2^{k-1})| \leqslant (k+k'+2)M ,$$

c'est-à-dire:

$$(a) \qquad \left| \frac{f(2^{k'-1})}{k'} - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} + \frac{2}{kk'} \right) M .$$

Ceci montre que la suite $\left\{ \frac{f(2^{k-1})}{k} \right\}$ est une suite de Cauchy. Elle tend donc vers une limite finie, soit λ.

Comme $\frac{f(2^k)}{k} = \frac{f(2^k)}{k+1} \times \frac{k+1}{k}$, on voit que $\frac{f(2^k)}{k}$ tend vers λ quand k tend vers $+\infty$.

Il est à noter que, si dans (a) on fait tendre k' vers $+\infty$ avec k fixe, on obtient:

$$\left| \lambda - \frac{f(2^{k-1})}{k} \right| \leqslant \frac{M}{k} ,$$

c'est-à-dire:

$$(b) \qquad |f(2^{k-1}) - k\lambda| \leqslant M .$$

2.1.2. Si maintenant on prend m impair dans (I'), on obtient:

$$|f(2^{k-1}) + f(m^k) - kf(m)| \leqslant (k+1) M ,$$

d'où:

$$\begin{aligned} |f(m^k) - kf(m)| &\leqslant (k+1) M + |f(2^{k-1})| \\ &\leqslant (k+1) M + k|\lambda| + M , \quad \text{d'après (b),} \\ &\leqslant k\left(\left((1+\frac{2}{k}) M + |\lambda| \right) \right) \\ &\leqslant kM' , \end{aligned}$$

où $M' = 3M + |\lambda|$.

En remplaçant m par $m^{k'}$ $(k' \geqslant 1)$, on obtient:

$$|f(m^{kk'}) - kf(m^{k'})| \leqslant kM' .$$

En intervertissant k et k', on a:

$$|f(m^{kk'}) - k'f(m^k)| \leqslant k'M' .$$

Il résulte de là que, quel que soit m *impair*, et quels que soient k et $k' \geqslant 1$, on a:

$$| kf(m^{k'}) - k' f(m^k) | \leqslant (k+k')\, M' ,$$

c'est-à-dire:

$$\text{(c)} \qquad \left| \frac{f(m^{k'})}{k'} - \frac{f(m^k)}{k} \right| \leqslant \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) M' .$$

Ceci montre que, pour chaque m impair, la suite $\left\{ \dfrac{f(m^k)}{k} \right\}$ est une suite de Cauchy, et tend donc vers une limite finie.

2.2. On voit que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{f(m^k)}{k}$ tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$.
On vient de le montrer dans le cas où m est impair. Si maintenant m est pair, on peut écrire:

$$m = 2^\alpha m', \quad \text{avec} \quad \alpha \geqslant 1 \quad \text{et} \quad m' \text{ impair.}$$

On a alors:

$$\frac{f(m^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha} m'^k)}{k} = \frac{f(2^{k\alpha})}{k} + \frac{f(m'^k)}{k} = \alpha \cdot \frac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha} + \frac{f(m'^k)}{k} .$$

Le dernier terme tend vers une limite finie quand k tend vers $+\infty$ puisque m' est impair. D'autre part, d'après ce que l'on a vu au § 1.1., $\dfrac{f(2^{k\alpha})}{k\alpha}$ tend vers λ.

2.3. Ceci dit, définissons les fonctions f^* et g_1 sur $\mathbf{N}^*$ par:

$$f^*(m) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(m^k)}{k} \qquad \text{et} \qquad g_1(m) = f(m) - f^*(m) .$$

On a donc $f(m) = f^*(m) + g_1(m)$.
On va montrer successivement que g_1 est bornée, puis que f^* est complètement additive, de sorte que g_1 est additive.

2.3.1. Tout d'abord, si m est impair, en prenant $k = 1$ dans (c), et faisant tendre k' vers $+\infty$, on obtient:

$$| f^*(m) - f(m) | \leqslant M', \text{ c'est-à-dire } | g_1(m) | \leqslant M'.$$

Si maintenant m est pair, d'après ce que l'on a vu plus haut, en posant:

$m = 2^\alpha m'$, avec $\alpha \geqslant 1$ et m' impair, on a:

$$f^*(m) = \alpha\lambda + f(m'),$$

d'où:

$$\begin{aligned} g_1(m) &= f(m) - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= f(2^\alpha) + f(m') - \alpha\lambda - f^*(m') \\ &= g_1(m') + \left(f(2^\alpha) - (\alpha+1)\lambda\right) + \lambda . \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que l'on vient de voir et de (b), où $k = \alpha + 1$, on voit que:

$$|g_1(m)| \leqslant M' + M + |\lambda| \quad (=4M+2|\lambda|) .$$

2.3.2. f^* est additive car, si $(m, n) = 1$, on a pour $k \geqslant 1$

$$\frac{f((mn)^k)}{k} = \frac{f(m^k n^k)}{k} = \frac{f(m^k)}{k} + \frac{f(n^k)}{k},$$

ce qui donne en faisant tendre k vers $+\infty$: $f^*(mn) = f^*(m) + f^*(n)$.

2.3.3. f^* est complètement additive, car, quels que soient p premier et $\alpha > 1$,

$$\frac{f((p^\alpha)^k)}{k} = \alpha \frac{f(p^{\alpha k})}{\alpha k},$$

d'où, par passage à la limite $f^*(p^\alpha) = \alpha f^*(p)$.

2.4. Par le même procédé que dans 1.3, on démontre que $f^*(n+1) - f^*(n) = 0\,(1)$; utilisant alors un résultat de Wirsing [2], on a:

$$f^*(n) = C \log n + g_2(n),$$

où C est une constante et g_2 est une fonction additive bornée.

On a donc:

$$f(n) = C \log n + g_1(n) + g_2(n),$$

ce qui est bien le résultat cherché puisque $g_1 + g_2$ est une fonction additive bornée.