1. Introduction historique

THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT [1]

par François DRESS

1. INTRODUCTION HISTORIQUE

Depuis Pythagore, de très nombreux mathématiciens se sont intéréssés aux propriétés « magiques » des nombres entiers, en particulier des nombres triangulaires, des nombres carrés, des nombres m-gonaux (les triangulaires sont les entiers de la forme $n(n+1)/2$: nombre des éléments d'un triangle de points de base n, $\begin{smallmatrix}&&&\cdot\\&&\cdot&&\cdot\\&\cdot&&\cdot&&\cdot\\\cdot&&\cdot&&\cdot&&\cdot\end{smallmatrix}$ par exemple, les nombres carrés sont les carrés: nombre d'éléments d'un carré de points, etc...).

C'est Bachet qui semble avoir remarqué le premier, en 1621, que tout entier positif pouvait s'écrire comme somme de 4 carrés (certains étant éventuellement nuls), encore qu'il y ait quelques raisons de penser que Diophante connaissait déjà ce résultat empirique. Ensuite Fermat a noté, en 1636, que tout entier positif pouvait s'écrire comme somme de 3 nombres triangulaires, de 4 carrés, de m nombres m-gonaux (on s'apercevra plus tard que ce résultat général n'est pas le meilleur possible).

Ainsi, pour les nombres triangulaires:

$$
\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
12 = 10 + 1 + 1 = 6 + 6 + 0 = 6 + 3 + 3 \\
13 = 10 + 3 + 0 = 6 + 6 + 1 \\
14 = 10 + 3 + 1 \\
15 = 15 + 0 + 0 = 6 + 6 + 3 \\
16 = 15 + 1 + 0 = 10 + 6 + 0 = 10 + 3 + 3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

et pour les carrés:

$$
\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
12 = 9 + 1 + 1 + 1 = 4 + 4 + 4 + 0 \\
13 = 9 + 4 + 0 + 0 = 4 + 4 + 4 + 1
\end{array}
$$

[1]) Cet article reprend et complète une partie de la conférence qu'a prononcée F. DRESS aux Journées Arithmétiques de 1971 (24 au 29 mai 1971, à Marseille).

$$14 = 9 + 4 + 1 + 0$$
$$15 = 9 + 4 + 1 + 1$$
$$16 = 16 + 0 + 0 + 0 = 4 + 4 + 4 + 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Fermat avait ajouté, dans la lettre à Mersenne où il indiquait cette découverte, qu'il n'avait pas la place d'en donner la démonstration, mais qu'il y consacrerait un livre entier. Le livre ne fut jamais publié... On peut d'ailleurs douter que Fermat ait été en possession d'une démonstration correcte car des efforts infructueux furent déployés pendant plus d'un siècle, par Euler en particulier, pour tenter de résoudre ce problème. C'est finalement Lagrange, en 1770, qui en donna la première démonstration.

En même temps d'autres théorèmes empiriques, de nature additive également, étaient énoncés. Les deux plus célèbres sont le problème de Goldbach, formulé en 1742 dans une lettre à Euler: tout entier pair est-il somme de 2 nombres premiers ? et le problème de Waring, formulé en 1770 dans un livre (avec addition du « etc... » dans l'édition de 1782!): tout entier positif est-il somme de 9 cubes, de 19 bicarrés, etc... ?

On verra que ces questions sont, malgré la simplicité de leur énoncé, extrêmement ardues et que l'intervalle qui sépare l'énoncé empirique de sa démonstration se compte en dizaines d'années ou plus souvent en siècles (phénomène assez courant en arithmétique!).

2. Notions fondamentales en théorie additive des nombres

En donnant le premier résultat partiel intéressant dans le problème de Goldbach, Schnirelman esquissa, en 1930, un cadre général pour tous les problèmes additifs relatifs à des suites d'entiers.

Etant donné 2 suites croissantes d'entiers strictement positifs $A = \{a_1 < a_2 < ...\}$ et $B = \{b_1 < b_2 ...\}$, on appelle somme de A et B et on note $A + B$ la suite croissante obtenue en réordonnant l'ensemble $A \cup B \cup \{a_i + b_j \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ (on convient parfois que $a_0 = 0 \in A$, $b_0 = 0 \in B$, auquel cas on considère simplement l'ensemble $\{a_i + b_j\}$).

On peut en particulier effectuer les sommes $A + A = 2A$, $A + A + A = 3A, ..., A + ... + A = hA, ...$ On dit alors que la suite A est une base (d'ordre $\leqslant h$) des entiers s'il existe h tel que $hA = \mathbf{N}$ (A est exactement d'ordre h si $(h-1)\,A \subsetneqq \mathbf{N}$). On peut également définir la notion de base relativement à une sous-suite de $\mathbf{N}$ (les entiers pairs dans le problème de Goldbach, par exemple).