

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT
Autor: Dress, François
Kapitel: 3. Théorèmes de Schnirelman et de Mann
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45368>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Etant donné une suite $A = \{a_k\}$, on définit la fonction $A(n) = \sum_{1 \leq a_k \leq n} 1 =$ nombre des a_k compris entre 1 et n . On définit ensuite la densité de Schnirelman de la suite A par :

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n}.$$

Cette définition appelle deux remarques. Primo, on a $1 \in A$ dès que $d(A) > 0$. Secundo, la notion de densité de Schnirelman est très différente de celle, classique, de densité asymptotique, définie par $\liminf \frac{A(n)}{n}$.

En particulier, $d(A) = 1$ équivaut à $A = \mathbf{N}$, tandis que $d. \text{ asympt. } (A) = 1$ équivaut à « presque tous les entiers appartiennent à A ». Indiquons enfin une notion intermédiaire, « tous les entiers assez grands appartiennent à A », fréquemment utilisée en théorie additive (théorème de Vinogradov sur les entiers impairs sommes de 3 nombres premiers, constantes $G(k)$ du problème de Waring).

3. THÉORÈMES DE SCHNIRELMAN ET DE MANN

La densité de Schnirelman est un outil remarquable pour prouver que certaines suites sont des bases. Il ne faut pas cependant en attendre plus que des résultats d'existence, avec au mieux une majoration délirante de l'ordre ($2 \cdot 10^{10}$ pour les nombres premiers, nettement pire dans le problème de Waring par la méthode de Linnik et Khintchine, par exemple), en raison de l'influence très pathologique des premiers termes de la suite (et comme « premiers » n'est jamais que le contraire de « à l'infini », cela peut entraîner fort loin... !).

Les principaux théorèmes en la matière sont les suivants :

THÉORÈME (Schnirelman, 1930). $d(A+B) \geq d(A) + d(B) - d(A)d(B)$.

La démonstration, que nous ne donnerons pas ici, est fort simple et s'appuie, modulo la minoration $\forall n [A(n) \geq n \cdot d(A)]$, sur un dénombrement très banal.

LEMME. $d(A) + d(B) \geq 1 \Rightarrow A + B = \mathbf{N}$.

Une simple affaire de tiroirs, tout aussi banale.

COROLLAIRE. *Toute suite de densité de Schnirelman strictement positive est une base.*

En effet, l'inégalité de Schnirelman peut s'écrire

$$(1 - d(A + B)) \leq (1 - d(A))(1 - d(B)).$$

Il s'ensuit, en particulier, que $(1 - d(hA)) \leq (1 - d(A))^h \leq \frac{1}{2}$ si $d(A) > 0$ et $h \geq h_0$. Et le lemme précédent entraîne immédiatement que $2h_0A = \mathbf{N}$.

Schnirelman a ainsi prouvé que la suite $P = \{1\} \cup \{\text{nombre premiers}\}$ était une base en démontrant par une méthode de crible que $d(2P) > 0$.

THÉORÈME (Mann, 1942). $d(A + B) \geq \min(d(A) + d(B), 1)$.

La démonstration de ce théorème est assez ardue et il faut ajouter qu'il représente en un sens le meilleur résultat possible. Si l'on a par exemple (k étant un entier ≥ 2)

$$A = B = (1, k + 1, 2k + 1, \dots),$$

alors

$$A + B = (1, 2, k + 1, k + 2, 2k + 1, 2k + 2, \dots),$$

cependant que l'on a $d(A) = d(B) = \frac{1}{k}$ et $d(A + B) = \frac{2}{k} = d(A) + d(B)$.

4. GÉNÉRALITÉS SUR LE PROBLÈME DE WARING

Nous en avons déjà vu l'énoncé: pour $k = 2, 3, 4, \dots$, la suite des puissances k -ièmes est-elle une base? La réponse est affirmative, comme nous le verrons, et l'on désigne traditionnellement par $g(k)$ l'ordre de cette base. Pour les premières valeurs de k , l'évidence empirique conduit à conjecturer les valeurs suivantes:

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 9, \quad g(4) = 19.$$

En exceptant le théorème des 4 carrés de Lagrange, la première démonstration d'existence, dans le cas particulier des bicarrés, est due à Liouville, en 1859, avec la majoration $g(4) \leq 53$. Sa démonstration,