Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT

Autor: Dress, François

Kapitel: 3. Théorèmes de Schnirelman et de Mann

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45368

Etant donné une suite $A = \{a_k\}$, on définit la fonction $A(n) = \sum_{1 \leq a_k \leq n} 1$ = nombre des a_k compris entre 1 et n. On définit ensuite la densité de Schnirelman de la suite A par:

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n}.$$

Cette définition appelle deux remarques. Primo, on a $1 \in A$ dès que $d(A) > 0$. Secundo, la notion de densité de Schnirelman est très différente de celle, classique, de densité asymptoptique, définie par $\liminf \frac{A(n)}{\mathrm{n}}$. En particulier, $d(A) = 1$ équivaut à $A = \mathbf{N}$, tandis que d. asympt. $(A) = 1$ équivaut à « presque tous les entiers appartiennent à A ». Indiquons enfin une notion intermédiaire, « tous les entiers assez grands appartiennent à A », fréquemment utilisée en théorie additive (théorème de Vinogradov sur les entiers impairs sommes de 3 nombres premiers, constantes $G(k)$ du problème de Waring).

3. Théorèmes de Schnirelman et de Mann

La densité de Schnirelman est un outil remarquable pour prouver que certaines suites sont des bases. Il ne faut pas cependant en attendre plus que des résultats d'existence, avec au mieux une majoration délirante de l'ordre (2.10^{10} pour les nombres premiers, nettement pire dans le problème de Waring par la méthode de Linnik et Khintchine, par exemple), en raison de l'influence très pathologique des premiers termes de la suite (et comme « premiers » n'est jamais que le contraire de « à l'infini », cela peut entraîner fort loin... !).

Les principaux théorèmes en la matière sont les suivants:

Théorème (Schnirelman, 1930). $d(A+B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A)\, d(B)$.

La démonstration, que nous ne donnerons pas ici, est fort simple et s'appuie, modulo la minoration $\forall n\ [A(n) \geqslant n \,.\, d(A)]$, sur un dénombrement très banal.

Lemme. $d(A) + d(B) \geqslant 1 \Rightarrow A + B = \mathbf{N}$.

Une simple affaire de tiroirs, tout aussi banale.

Corollaire. *Toute suite de densité de Schnirelman strictement positive est une base.*

En effet, l'inégalité de Schnirelman peut s'écrire

$$\left(1-d(A+B)\right) \leqslant \left(1-d(A)\right)\left(1-d(B)\right).$$

Il s'ensuit, en particulier, que $(1 - d(hA)) \leqslant (1 - d(A))^h \leqslant \frac{1}{2}$ si $d(A) > 0$ et $h \geqslant h_0$. Et le lemme précédent entraîne immédiatement que $2h_0A = \mathbf{N}$.

Schnirelman a ainsi prouvé que la suite $P = \{1\} \cup \{\text{nombres premiers}\}$ était une base en démontrant par une méthode de crible que $d(2P) > 0$.

Théorème (Mann, 1942). $d(A+B) \geqslant \min(d(A) + d(B), 1)$.

La démonstration de ce théorème est assez ardue et il faut ajouter qu'il représente en un sens le meilleur résultat possible. Si l'on a par exemple (k étant un entier $\geqslant 2$)

$$A = B = (1, k+1, 2k+1, \ldots),$$

alors

$$A + B = (1, 2, k+1, k+2, 2k+1, 2k+2, \ldots),$$

cependant que l'on a $d(A) = d(B) = \dfrac{1}{k}$ et $d(A+B) = \dfrac{2}{k} = d(A) + d(B)$.

4. Généralités sur le problème de Waring

Nous en avons déjà vu l'énoncé: pour $k = 2, 3, 4, \ldots$, la suite des puissances k-ièmes est-elle une base ? La réponse est affirmative, comme nous le verrons, et l'on désigne traditionnellement par $g(k)$ l'ordre de cette base. Pour les premières valeurs de k, l'évidence empirique conduit à conjecturer les valeurs suivantes:

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 9, \quad g(4) = 19.$$

En exceptant le théorème des 4 carrés de Lagrange, la première démonstration d'existence, dans le cas particulier des bicarrés, est due à Liouville, en 1859, avec la majoration g $(4) \leqslant 53$. Sa démonstration,