6. Sommes de bicarrés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

5. Sommes de carrés

Avant d'exposer, dans le cas des bicarrés et dans celui des cubes, le principe des méthodes élémentaires, puis de donner une démonstration simple du théorème de Hilbert, nous tenons à rappeler très brièvement quelques résultats essentiels sur les sommes de carrés.

Le résultat essentiel sur les sommes de 2 carrés, énoncé en 1625 par Girard puis un peu plus tard par Fermat, démontré en 1749 par Euler, est le suivant: N est somme de 2 carrés si et seulement si les nombres premiers de la forme $4n + 3$ qui figurent dans sa décomposition y figurent avec un exposant pair — en autres termes, si N est le produit d'un carré par un entier composé uniquement avec des facteurs premiers 2 ou de la forme $4n + 1$. On notera que les sommes de 2 carrés forment une suite de densité asymptotique nulle (la densité jusqu'à x est équivalente à $1/\text{Log}\, x$).

Par souci d'ordre, énonçons le théorème de Lagrange: tout N (positif ou nul) est somme de 4 carrés (positifs ou nuls). On en trouvera un peu partout des démonstrations très nombreuses et plus ou moins variées...

Le problème de déterminer les sommes de 3 carrés est beaucoup plus difficile que les précédents. Il est en liaison très étroite avec la théorie des formes quadratiques binaires. Legendre, en 1798, puis Gauss, en 1801, ont établi le résultat suivant: N est somme de 3 carrés si et seulement si il n'est pas de la forme $4^k\,(8n+7)$.

On remarquera pour terminer que le résultat sur les nombres triangulaires est un corollaire immédiat du théorème des 3 carrés. En effet

$$m = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; \# \; 8m + 3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$$

et les entiers de la forme $8m + 3$ sont bien sommes de 3 carrés (impairs, pour de banales raisons de congruences modulo 8).

6. Sommes de bicarrés

Nous allons rapporter la méthode de Liouville, puis nous indiquerons ensuite très sommairement comment la majoration obtenue peut être améliorée en conservant les méthodes élémentaires.

On considère l'identité

$$6(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)^2 = \sum_{i<j} [(a_i+a_j)^4 + (a_i-a_j)^4] = B_{12},$$

en désignant par B_q un entier qui est somme de q bicarrés (en fait, l'identité que nous donnons ici est due à Lucas, mais celle qu'utilisait Liouville lui est équivalente). Comme tout entier est somme de 4 carrés, on obtient ainsi

$$6a^2 = B_{12}, \text{ pout tout } a,$$

puis

$$6m = 6(a^2+b^2+c^2+d^2) = B_{48}, \text{ pour tout } m,$$

et enfin, comme tout entier n est de la forme $6m + h \, . \, 1^4$ (avec $h = 0, 1, ..., 5$),

$$n = B_{53}, \text{ pour tout } n, \text{ i.e. } g(4) \leqslant 53,$$

ce qui est très exactement le résultat donné par Liouville.

Pour améliorer cette majoration, on a utilisé essentiellement, outre diverses petites astuces, deux remarques:

— certains entiers a peuvent s'écrire $a = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_3{}^2$, de sorte qu'alors $6a^2 = B_{11}$;

— certains entiers m peuvent s'écrire comme sommes de 3 carrés.

Mais on peut faire un peu mieux. L'idée que nous exposerons pour les sommes de cubes et surtout pour la démonstration générale du théorème de Hilbert nous a permis de « partir » de sommes de 2 carrés au lieu de sommes de 3, et nous avons ainsi obtenu $g(4) \leqslant 30$. C'est la meilleure majoration actuellement connue, mais il est vraisemblable que ce n'est pas pour bien longtemps, des travaux sont en cours où les méthodes analytiques reprendraient leurs droits...

Signalons pour terminer ce paragraphe la majoration $g(4) \geqslant 19$. Des tables numériques extrêmement étendues ont été calculées qui laissent à penser qu'il n'y a que 7 entiers qui nécessitent 19 bicarrés: 79, 159, 239, 319, 399, 479 et 559.

7. Sommes de cubes

L'identité « historique » est

$$6x(x^2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2) = \sum_i [(x+a_i)^3 + (x-a_i)^3] = C_6,$$