

# 10. Théorème de Hilbert. Fin de la démonstration

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

à  $\mathbf{Q}$ , ainsi que son enveloppe convexe  $h(S)$ . Puis on considère les sous-ensembles  $T$  et  $T'$  constitués par les formes  $(a_1x_1 + \dots + a_5x_5)^{2k}$  vérifiant  $a_1^2 + \dots + a_5^2 \leq 1$ , les  $a_i$  appartenant respectivement à  $\mathbf{Q}$  et à  $\mathbf{R}$ . On a l'inclusion  $h(T) \subset h(S)$ , cependant que  $h(T)$  et  $h(T')$  ont même intérieur.

On étudie ensuite l'intégrale

$$\int_{\mathcal{S}} (a_1x_1 + \dots + a_5x_5)^{2k} da_1 \dots da_5 / \int_{\mathcal{S}} da_1 \dots da_5$$

( $\mathcal{S}$  étant l'hypersphère  $a_1^2 + \dots + a_5^2 \leq 1$ )

et on établit, à l'aide d'un banal changement de variables, qu'elle est égale à  $c(x_1^2 + \dots + x_5^2)^k$ , avec

$$c = \int_{\mathcal{S}} t_1^{2k} dt_1 \dots dt_5 / \int_{\mathcal{S}} dt_1 \dots dt_5 > 0.$$

La forme  $f = c(x_1^2 + \dots + x_5^2)^k$  se trouve par conséquent à l'intérieur de  $h(T')$ , donc de  $h(T)$ , donc de  $h(S)$ , ainsi d'ailleurs que toutes les formes  $\lambda f$  ( $\lambda$  réel  $\in [0, 1]$ ). Et on peut conclure en choisissant  $\lambda$  tel que  $\lambda c \in \mathbf{Q}$ .

Mais nous pouvons faire un peu mieux: en effet la forme  $f$  est à l'intérieur de  $h(S)$  tandis que la forme  $g = x_5^2$  est dans  $S$  donc dans la variété affine support de  $S$ ; ce qui permet d'en déduire qu'il existe  $\mu_0$  réel  $> 0$  tel que, pour tout  $\mu$  réel  $\in [0, \mu_0]$ , la forme  $f - \mu g$  se trouve dans  $h(S)$ , ainsi d'ailleurs que toutes les formes  $\lambda f - \lambda \mu g$  ( $\lambda$  réel  $\in [0, 1]$ ). Nous choisissons alors  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda c$  et  $\lambda \mu$  soient rationnels et, en utilisant les résultats rappelés sur les ensembles convexes et les vecteurs à coordonnées rationnelles, nous en déduisons l'identité cherchée.

## 10. THÉORÈME DE HILBERT. FIN DE LA DÉMONSTRATION

**THÉORÈME.** *Pour tout entier positif  $k$  il existe des entiers positifs  $A = A(k)$  et  $T = T(k)$  tels que tout intervalle  $[m - A, m]$  contienne un nombre qui soit somme de  $T$  puissances  $2k$ -ièmes.*

**COROLLAIRE** (théorème de Hilbert). *Pour tout entier positif  $n$ ,  $g(n)$  est fini.*

On pourra remarquer que la recherche d'une majoration explicite de  $g(2k)$  en utilisant notre démonstration dépend essentiellement des constantes  $M$  et  $m_i$  qui interviennent dans l'identité fondamentale, les autres constantes (celles que l'on trouve dans l'identité relative au problème facile de Waring comme celles qui interviendront dans la suite de la démonstration) étant aisément estimables ou majorables.

Nous allons donc montrer que, pour tout entier  $m$ , il existe  $r < A$  tel que  $m - r$  soit somme de  $T$  puissances  $2k$ -ièmes (rappelons que les diverses constantes que nous allons rencontrer:  $R, M, \dots$  ont déjà été définies, soit au paragraphe 8 soit au paragraphe 9, et qu'elles dépendent toutes de  $k$ , et de  $k$  seulement). Si  $l^k$  est la plus grande puissance  $k$ -ième inférieure ou égale à  $\frac{m}{RM}$ , nous pouvons tout d'abord écrire

$$m = R.Ml^k + r_1, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{m}{RM} \right)^{1/k} \leq l \leq \left( \frac{m}{RM} \right)^{1/k}$$

$$\text{et} \quad 0 \leq r_1 \leq kRM \left( \frac{m}{RM} \right)^{(k-1)/k}$$

(la constante  $\frac{1}{2}$  n'est pas essentielle; en toute rigueur, l'inégalité où elle figure n'est vérifiée que pour  $m \geq m_0(k)$ , mais il nous semble inutile d'alourdir notre démonstration avec de tels détails qui ne peuvent avoir d'importance que dans la recherche éventuelle d'une majoration explicite de  $g(2k)$ ).

Nous pouvons maintenant, en utilisant le corollaire du lemme qui énonce l'identité fondamentale, écrire

$$m = \sum_{i=1}^R x_i^{2k} + \sum_{h=1}^{QR} u_h^{2k} + r_1,$$

les  $x_i$  étant des entiers arbitraires inférieurs ou égaux à  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m}{RM} \right)^{1/2k}$ .

Il nous faut alors employer le lemme sur l'identité relative au problème facile de Waring. Nous supposons que l'on a  $|\beta| < |\alpha|$ , ce qui est toujours possible par une translation sur  $n$ . Définissons

$$a = \max_i a_i, \quad b = \max_i |b_i/a_i|$$

de sorte que pour tout  $n \leq \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m}{RM} \right)^{1/2k} \right\} - b$ , nous pouvons toujours poser, pour tout  $i$ ,  $x_i = a_i n + b_i$ . Ce qui permet d'écrire

$$m = \sum_{j=1}^S y_j^{2k} + \sum_{h=1}^{QR} u_h^{2k} + r_1 - (\alpha n + \beta),$$

la condition de majoration sur  $n$  pouvant s'écrire (ici encore pour  $m$  assez grand):

$$n \leq C m^{1/2k}.$$

Il est clair qu'en général  $r_1$  est trop grand pour pouvoir être « presque annulé » par le terme  $-(\alpha n + \beta)$ , mais nous pouvons résoudre cette difficulté de la même manière que nous l'avons fait pour les sommes de cubes. On extraira donc la plus grande puissance  $2k$ -ième inférieure ou égale à  $r_1$ , puis on répétera ce processus:

$$r_1 = z_1^{2k} + r_2$$

$$\text{avec } 0 \leq r_2 \leq k \left\{ kRM \left( \frac{m}{RM} \right)^{(k-1)/k} \right\}^{(k-1)/k} = c_2 m^{\gamma^2} \left( \gamma = \frac{k-1}{k} \right)$$

$$r_2 = z_2^{2k} + r_3 \quad \text{avec } 0 \leq r_3 \leq c_3 m^{\gamma^3}$$

.....

$$r_{t-1} = z_{t-1}^{2k} + r_t \quad \text{avec } 0 \leq r_t \leq c_t m^{\gamma^t}.$$

En prenant  $t$  tel que  $\gamma^t$  soit supérieur à  $1/2k$ , il sera alors possible (toujours pour  $m$  assez grand) de choisir  $n$  de telle façon que le reste final  $r = r_t - (\alpha n + \beta)$  vérifie

$$r < \alpha,$$

et nous avons ainsi obtenu le résultat cherché: pour  $A = \alpha$ , il existe toujours  $r < A$  tel que  $m - r$  soit somme de  $T = S + QR + t - 1$  puissances  $2k$ -ièmes.

### APPENDICE

Tableau des valeurs ou des meilleurs encadrements de  $G(k)$  et de  $g(k)$  actuellement connus pour les petites valeurs de  $k$ :

| $k$    | 2 | 3   | 4     | 5    | 6    | 7    | 8     | 9     | 10     |
|--------|---|-----|-------|------|------|------|-------|-------|--------|
| $G(k)$ | 4 | 4-7 | 16    | 6-23 | 9-36 | 8-52 | 32-73 | 13-99 | 12-122 |
| $g(k)$ | 4 | 9   | 19-30 | 37   | 73   | 143  | 279   | 548   | 1079   |