

# I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNÔMES SUR UN CORPS DE NOMBRES

par Maurice MIGNOTTE

## I. INTRODUCTION

Désignons par  $K$  un corps de nombres et par  $A$  l'anneau des entiers de  $K$ . Nous ne considérerons que des polynômes unitaires à coefficients dans  $A$ .

Un élément  $x$  de  $A$  sera dit irréductible s'il n'est pas inversible dans  $A$  et s'il n'est pas égal au produit de deux éléments non inversibles de  $A$ . Un polynôme unitaire  $P$  à coefficients dans  $A$  sera dit irréductible s'il n'est pas constant et s'il n'est pas égal au produit de deux polynômes non constants et à coefficients dans  $A$ . Du fait que l'anneau  $A$  est intégralement clos, un polynôme unitaire à coefficients dans  $A$  est irréductible dans  $A$  si et seulement s'il est irréductible sur  $K$ . Dans toute la suite, il importera de ne pas confondre le fait qu'un polynôme  $P$  est irréductible et le fait, qu'en un point  $x$  de  $A$ , la valeur  $P(x)$  est un élément irréductible de  $A$ .

Les deux critères d'irréductibilité qui font l'objet de ce travail sont de même nature: si un polynôme unitaire et à coefficients dans  $A$  prend en certains points de  $A$  suffisamment de valeurs qui sont des unités ou des éléments irréductibles de  $A$ , alors  $P$  est nécessairement irréductible.

Le point de départ consiste à remarquer que si  $P$  est le produit de deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  à coefficients dans  $A$  et si  $x$  est un point de  $A$  tel que  $P(x)$  soit une unité ou un élément irréductible de  $A$ , alors l'un au moins des polynômes  $P_1$  et  $P_2$  prend au point  $x$  une valeur qui est une unité de  $A$ . Ceci conduit à chercher des majorations du nombre de points  $x$ , contenus dans certains domaines, où un polynôme  $Q$  peut prendre des valeurs qui sont des unités. Ces majorations font intervenir la hauteur des coefficients de  $Q$ ; pour les appliquer aux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  il est nécessaire de trouver une majoration des hauteurs des polynômes  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de celle du polynôme  $P$ .

Nous choisirons deux domaines différents pour les points  $x$ ; dans le premier cas les points considérés auront une hauteur bornée, dans le second cas chacun de leurs conjugués sera assez grand. Dans le premier cas nous

utiliserons le plongement logarithmique du corps  $K$  et le fait que l'image par ce plongement du groupe des unités est un réseau; il suffira de majorer la norme des images de  $Q(x)$  pour des points  $x$  de hauteur bornée. Dans le second cas, nous utiliserons simplement le fait que si  $x$  a tous ses conjugués assez grands il en est de même de  $Q(x)$  et donc que  $Q(x)$  ne peut pas être une unité.

## II. UNE REMARQUE PRÉLIMINAIRE

Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficients dans  $A$  qui soit le produit de deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  à coefficients dans  $A$ . Les valeurs de ces polynômes en un point  $x$  de  $A$  donnent lieu à des remarques évidentes: Si  $P(x)$  est un élément irréductible de  $A$ , l'un des deux éléments  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  au moins est une unité; si  $P(x)$  est une unité, les deux éléments  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  de  $A$  sont des unités; d'où l'inégalité <sup>1)</sup>:

LEMME 1: *En désignant, pour chaque partie  $E$  de  $A$ , et tout polynôme  $Q$  sur  $A$ , par  $u(Q, E)$  et  $i(R, E)$  le nombre d'éléments de  $E$  où la valeur de  $Q$  est une unité, respectivement un élément irréductible, on a l'inégalité*

$$i(P, E) + 2u(P, E) \leq u(P_1, E) + u(P_2, E).$$

## III. MAJORATION DES HAUTEURS DE $P_1$ ET $P_2$

Considérons provisoirement un polynôme  $g$  à coefficients complexes et qui ne s'annule pas à l'origine.

Posons

$$g = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d.$$

Pour simplifier, nous supposerons  $g$  unitaire. Si  $g$  est le produit de deux polynômes unitaires  $g_1$  et  $g_2$ , nous cherchons à majorer les coefficients de  $g_1$  et  $g_2$ . Pour ceci, on utilisera le fait que les coefficients de  $g_1$  sont certaines fonctions des racines du polynôme  $g$ . Plus précisément, la somme des coefficients de  $g_1$  est égale à la somme de  $2^{d_1}$  ( $d_1$  désigne le degré de  $g_1$ )

<sup>1)</sup> Pour plus de détails, voir (1).