

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNOMES SUR UN CORPS DE NOMBRES
Autor: Mignotte, Maurice
Kapitel: V. Deuxième choix de E
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45369>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Conclusion.

THÉORÈME 1. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et qui ne s'annule pas à l'origine. Pour tout $a \geq 2$, il existe une constante C calculable explicitement et qui ne dépend que de $\deg P$, $|P|_2$ et K , telle que si P est réductible alors on a l'inégalité :

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq C (\text{Log } a)^r .$$

(Où $i_a(P)$ désigne le nombre de points x de hauteur majorée par a et tels que $P(x)$ soit un élément irréductible de A).

Démonstration :

Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients dans A et de produit P . D'après le lemme 1, nous avons l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leq u_a(P_1) + u_a(P_2) .$$

Soit S le nombre $2^{d-1} |P|_2$; le lemme 4 montre que $|P_1|_1$ et $|P_2|_1$ sont majorés par S .

Nous pouvons maintenant appliquer les lemmes 5 et 6 aux polynômes P_1 et P_2 . En tenant compte de l'inégalité (1), nous obtenons les majorations

$$\begin{aligned} u_a(P_1) + u_a(P_2) &\leq w C_1 (C_0 \text{Log } a)^r ((\deg P_1)^{r+1} + (\deg P_2)^{r+1}) \\ &\leq 2w C_1 (C_0 \text{Log } a)^r (\deg P)^{r+1} . \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. L'inégalité $a \geq 2$ n'a été introduite que pour éviter des complications inutiles. Le théorème reste vrai pourvu que l'on suppose $a \geq \alpha_0$ avec α_0 fixé, $\alpha_0 > 1$, mais cette fois la constante C dépend de α_0 .

CRITÈRE 1. S'il existe $a \geq 2$ tel que l'on ait l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) > C (\text{Log } a)^r$$

alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

V. DEUXIÈME CHOIX DE E

THÉORÈME 2. Soit P un polynôme unitaire réductible qui ne s'annule pas à l'origine et à coefficients dans A . Désignons par S le nombre $2^{d-1} |P|_2$, où d est le degré de P .

Pour tout entier x , dont tous les conjugués sont strictement supérieurs à S , l'élément $P(x)$ est réductible dans A .

Démonstration :

D'après le lemme 4 nous savons que si P_1 désigne un diviseur de P , alors $|P_1|_1$ est majoré par S . Soit alors σ_i un isomorphisme quelconque de K dans \mathbf{C} et soit x un entier dont tous les conjugués sont supérieurs à S . Nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |\sigma_i(P_1(x))| &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1} - (|P_1|_1 - 1) |\sigma_i(x)|^{d_1-1} \\ &\geq |\sigma_i(x)|^{d_1-1} (|\sigma_i(x)| + 1 - S) > S^{d_1-1} \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout i , la norme de $P_1(x)$ a un module strictement supérieur à 1; autrement dit $P_1(x)$ n'est pas une unité. Si P est égal au produit de P_1 et d'un polynôme P_2 , la même démonstration montre que $P_2(x)$ n'est pas une unité. Dans ces conditions, il est clair que l'élément $P(x)$ est réductible dans l'anneau A .

Du théorème résultent immédiatement les deux critères suivants:

CRITÈRE 2. Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans A et qui ne s'annule pas en zéro et de degré d . S'il existe un élément x entier dont tous les conjugués ont un module strictement supérieur à $2^{d-1} |P|_2$ et tel que l'élément $P(x)$ soit irréductible dans A , alors le polynôme P est irréductible sur K .

CRITÈRE 2'. Avec les mêmes notations que ci-dessus, s'il existe un entier rationnel x de module strictement supérieur à $2^{d-1} |P|_2$ et tel que $P(x)$ soit irréductible dans A , alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

RÉFÉRENCE

- [1] MIGNOTTE, M. Un critère d'irréductibilité des polynômes. *Enseignement mathématique*, tome 17 (1971), pp. 213-214.

(Reçu le 24 février 1971)

Maurice Mignotte
Centre Scientifique
Place du 8 mai 45
F-93 - Saint-Denis