Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CRITÈRES D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE POLYNOMES SUR UN CORPS DE NOMBRES

Autor: Mignotte, Maurice

Kapitel: V. Deuxième choix de E

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45369

Conclusion.

THÉORÈME 1. *Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et qui ne s'annule pas à l'origine. Pour tout $a \geqq 2$, il existe une constante C calculable explicitement et qui ne dépend que de $\deg P$, $|P|_2$ et K, telle que si P est réductible alors on a l'inégalité :*

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leqq C(\operatorname{Log} a)^r .$$

(Où $i_a(P)$ désigne le nombre de points x de hauteur majorée par a et tels que $P(x)$ soit un élément irréductible de A).

Démonstration :

Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients dans A et de produit P. D'après le lemme 1, nous avons l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leqq u_a(P_1) + u_a(P_2) .$$

Soit S le nombre $2^{d-1} |P|_2$; le lemme 4 montre que $|P_1|_1$ et $|P_2|_1$ sont majorés par S.

Nous pouvons maintenant appliquer les lemmes 5 et 6 aux polynômes P_1 et P_2. En tenant compte de l'inégalité (1), nous obtenons les majorations

$$\begin{aligned} u_a(P_1) + u_a(P_2) &\leqq w\, C_1 (C_0 \operatorname{Log} a)^r \left((\deg P_1)^{r+1} + (\deg P_2)^{r+1}\right) \\ &\leqq 2w\, C_1 (C_0 \operatorname{Log} a)^r (\deg P)^{r+1} . \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. L'inégalité $a \geqq 2$ n'a été introduite que pour éviter des complications inutiles. Le théorème reste vrai pourvu que l'on suppose $a \geqq \alpha_0$ avec α_0 fixé, $\alpha_0 > 1$, mais cette fois la constante C dépend de α_0.

CRITÈRE 1. *S'il existe $a \geqq 2$ tel que l'on ait l'inégalité*

$$i_a(P) + 2u_a(P) > C(\operatorname{Log} a)^r$$

alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

V. DEUXIÈME CHOIX DE E

THÉORÈME 2. *Soit P un polynôme unitaire réductible qui ne s'annule pas à l'origine et à coefficients dans A. Désignons par S le nombre $2^{d-1} |P|_2$, où d est le degré de P.*

Pour tout entier x, dont tous les conjugués sont strictement supérieurs à S, l'élément P (x) est réductible dans A.

Démonstration :

D'après le lemme 4 nous savons que si P_1 désigne un diviseur de P, alors $|P_1|_1$ est majoré par S. Soit alors σ_i un isomorphisme quelconque de K dans $\mathbf{C}$ et soit x un entier dont tous les conjugués sont supérieurs à S. Nous avons les inégalités suivantes

$$|\sigma_i(P_1(x)(| \geqq |\sigma_i(x)|^{d_1} - (|P_1|_1 - 1)|\sigma_i(x)|^{d_1-1}$$
$$\geqq |\sigma_i(x)|^{d_1-1}(|\sigma_i(x)| + 1 - S) > S^{d_1-1} \geqq 1 .$$

Ceci étant vrai pour tout i, la norme de $P_1(x)$ a un module strictement supérieur à 1; autrement dit $P_1(x)$ n'est pas une unité. Si P est égal au produit de P_1 et d'un polynôme P_2, la même démonstration montre que $P_2(x)$ n'est pas une unité. Dans ces conditions, il est clair que l'élément $P(x)$ est réductible dans l'anneau A.

Du théorème résultent immédiatement les deux critères suivants:

CRITÈRE 2. *Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans A et qui ne s'annule pas en zéro et de degré d. S'il existe un élément x entier dont tous les conjugués ont un module strictement supérieur à* $2^{d-1}|P|_2$ *et tel que l'élément P (x) soit irréductible dans A, alors le polynôme P est irréductible sur K.*

CRITÈRE 2'. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, s'il existe un entier rationnel x de module strictement supérieur à* $2^{d-1}|P|_2$ *et tel que P (x) soit irréductible dans A, alors le polynôme P est irréductible dans K [X].*

RÉFÉRENCE

[1] MIGNOTTE, M. Un critère d'irréductibilité des polynômes. *Enseignement mathémathique*, tome 17 (1971), pp. 213-214.

(Reçu le 24 février 1971)

Maurice Mignotte
Centre Scientifique
Place du 8 mai 45
F-93 - Saint-Denis