TOPOLOGIES FAIBLES ET TOPOLOGIES A GÉNÉRATION COMPACTE

Autor(en): **Frölicher, A. / Roulin, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-45371

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

TOPOLOGIES FAIBLES ET TOPOLOGIES A GÉNÉRATION COMPACTE

par A. FRÖLICHER et M. ROULIN

Ayant d'excellentes propriétés, la catégorie des espaces à génération compacte devient de plus en plus importante en topologie et en analyse fonctionnelle: cf. [1], [2], [3]. Comme il y a encore peu d'exemples convenables d'espaces topologiques séparés qui n'appartiennent pas à cette catégorie, il nous a paru judicieux d'en donner un exemple simple et naturel.

Rappelons qu'un espace topologique séparé X est à génération compacte si et seulement si toute application $f : X \to Y$ dont la restriction à tout compact K de X est continue, est elle-même continue.

Proposition 1. La topologie faible d'un espace de Hilbert séparable H de dimension infinie n'est pas à génération compacte.

Dénotons par H_f l'espace vectoriel sous-jacent de H, muni de la topologie faible c'est-à-dire de la topologie induite par toutes les fonctions de la forme $x \mapsto < x, a >$ où $a \in H$. H_f est un espace localement convexe séparé. Les ensembles de la forme

$$B^{\varepsilon}_{a_1, \ldots, a_n} = \{x \in H;\ | < x, a_i > | < \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n\},$$

où $\varepsilon > 0$, $n \in N$ et $a_1, \ldots, a_n \in H$, forment une base du filtre des voisinages de zéro dans H_f.

Pour démontrer la Proposition, nous utilisons les résultats suivants:

(1) Les bornés de H et de H_f sont les mêmes.

(2) Une application linéaire $A : H_f \to H$ est continue si et seulement si A est dégénérée, ce qui signifie que Ker A est de codimension finie.

(3) La restriction de la topologie faible à un sous-ensemble borné B de H est métrisable.

La partie intéressante de (1) est une forme du théorème de Banach-Steinhaus: tout borné de H_f est un borné de H. La réciproque ne sera pas utilisée et est triviale, car l'application $id_H : H \to H_f$ est continue.

Du résultat (2) nous utilisons aussi la partie la plus intéressante qui dit que $A : H_f \to H$ continue implique A dégénérée. En effet, de la continuité de A résulte l'existence d'un voisinage $U = B^{\varepsilon}_{a_1, \ldots, a_n}$ de zéro dans H_f tel que $A(U) \subset B_1$ où $B_1 = \{x \in H; \|x\| < 1\}$. Alors si $x \in H$ satisfait $x \perp a_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ on déduit que $\lambda x \in U$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, donc $\lambda . A(x) \in B_1$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et cela n'est possible que si $A(x) = 0$ c'est-à-dire si $x \in \operatorname{Ker} A$. La codimension de $\operatorname{Ker} A$ est donc $\leqslant n$.

Pour démontrer (3) on peut, après avoir choisi une base $\{e_i\}_{i \varepsilon N}$ de H, introduire la forme bilinéaire b suivante:

$$b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < x, e_n > . < y, e_n > .$$

b étant évidemment symétrique et définie positive, on obtient sur H à part la norme associée au produit scalaire donné une autre norme, celle associée à b, et par suite une certaine métrique. On vérifie par quelques estimations que pour tout borné B de H, la topologie faible sur B coïncide avec la topologie induite par cette métrique. Démontrons maintenant la Proposition 1. Le résultat (2) montre qu'on peut choisir facilement un opérateur compact A sur H tel que $A : H_f \to H$ n'est pas continu. Soit K un sous-ensemble compact de H_f. Un compact d'un espace vectoriel topologique est toujours borné. K est donc borné dans H_f est d'après (1) aussi borné dans H. Selon (3), K est donc métrisable. Or comme l'image d'une suite faiblement convergente par l'opérateur compact A est une suite convergente on a que la restriction $A \,|\, K : K \to H$ est continue. Il en résulte que H_f n'est pas à génération compacte.

Proposition 2. L'espace vectoriel à génération compacte associé à H_f est un espace vectoriel topologique.

Le foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces à génération compacte dans celle des espaces séparés possède un adjoint que nous dénotons selon [1] par k. Si E est un espace vectoriel topologique, la continuité de l'addition $E \times E \xrightarrow{+} E$ implique la continuité de $k(E \times E) \xrightarrow{+} kE$. Or $k(E \times E) = kE \,\pi\, kE$, où « π » dénote le produit de la catégorie des espaces à génération compacte. Puisque la topologie de $kE \,\pi\, kE$ est en général plus fine que la topologie produit, c'est-à-dire celle de $kE \times kE$, il n'est pas vrai en général que $kE \times kE \xrightarrow{+} kE$ est continue. En effet, dans [3], U. Seip donne un exemple d'un espace vectoriel F, muni d'une topologie à génération compacte, dont seulement $F \,\pi\, F \xrightarrow{+} F$, mais pas $F \times F \xrightarrow{+} F$ est continue.

La réponse à la question non triviale de savoir si kH_f est un espace vectoriel topologique est donnée par un des résultats les plus profonds de la théorie des espaces vectoriels topologiques, le théorème de Banach-Dieudonné. D'après ce théorème il résulte que la topologie de kH_f est celle de la convergence uniforme des produits scalaires $x \mapsto < x, a >$ sur les compacts de H.

RÉFÉRENCES

[1] STEENROD, N. A convenient category of topological spaces. *Mich. J. 14* (1967), pp. 133-152.

[2] GABRIEL, P. and M. ZISMAN. Calculus of fractions and homotopy theory. *Ergeb. der Math.* Bd. 35; Springer Verlag 1967.

[3] SEIP, U. *Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 273, Springer Verlag 1972.

(Reçu le 1er février 1972)

A. Frölicher et M. Roulin
Institut de Mathématiques
Université de Genève
CH — 1211 Genève 24

vide-leer-empty