

# FIBRES EN DROITES ET FEUILLETAGES DU PLAN

Autor(en): **Godbillon, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45373>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# FIBRÉS EN DROITES ET FEUILLETAGES DU PLAN

par Claude GODBILLON

## 1. INTRODUCTION

Il est bien connu que tout feuilletage  $\mathcal{F}$  du plan  $\mathbf{R}^2$  possède les propriétés suivantes :

(i)  $\mathcal{F}$  est orientable;

(ii) chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est fermée dans  $\mathbf{R}^2$  et homéomorphe à la droite réelle  $\mathbf{R}$ : Poincaré-Bendixson;

(iii) l'espace des feuilles  $X$  de  $\mathcal{F}$  est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe (en général non séparée): Haefliger-Reeb [2];

(iv) la projection  $p: \mathbf{R}^2 \rightarrow X$  est une fibration localement triviale: Whitney [4].

Inversement d'ailleurs si  $X$  est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe, et si  $\eta: E \xrightarrow{p} X$  est un fibré localement trivial en droites réelles sur  $X$ , l'espace total  $E$  est une variété topologique de dimension 2 à base dénombrable et acyclique. Si elle est séparée elle est homéomorphe au plan  $\mathbf{R}^2$ , et les fibres de  $\eta$  déterminent un feuilletage du plan.

Deux feuilletages (orientés)  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de  $\mathbf{R}^2$  sont *conjugués* s'il existe un homéomorphisme  $h$  du plan transformant les feuilles de l'un en les feuilles de l'autre. On peut de plus imposer à l'homéomorphisme  $h$  de conserver l'orientation du plan  $\mathbf{R}^2$ , ou d'être compatible avec les orientations des feuilletages, ou encore d'avoir simultanément ces deux propriétés (cette dernière situation a été étudiée par Kaplan [3]).

Dans chacun de ces cas les espaces des feuilles  $X$  et  $X'$  de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont homéomorphes, et les fibrés  $p: \mathbf{R}^2 \rightarrow X$  et  $p': \mathbf{R}^2 \rightarrow X'$  sont isomorphes<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Deux fibrés  $p: E \rightarrow X$  et  $p': E' \rightarrow X'$  sont *isomorphes* s'il existe des homéomorphismes  $F: E \rightarrow E'$  et  $f: X \rightarrow X'$  tels que  $p' \circ F = f \circ p$ . Lorsque  $X = X'$  et  $f = id_X$  on dit qu'ils sont *équivalents*.

On peut donc ramener le problème de la classification des feuilletages du plan aux deux problèmes suivants :

(i) classifier les variétés topologiques de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexes ;

(ii) classifier sur une telle variété les fibrés en droites localement triviaux ayant un espace total séparé.

## 2. UN EXEMPLE IMPORTANT : LE BRANCHEMENT SIMPLE [1]

Le *branchement simple*  $Z$  est la variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et contractile obtenue à partir de l'espace somme de deux exemplaires  $R_1$  et  $R_2$  de la droite réelle  $\mathbf{R}$  en identifiant les points  $x_1 \in R_1$  et  $x_2 \in R_2$  pour  $x_1 = x_2 < 0$ .

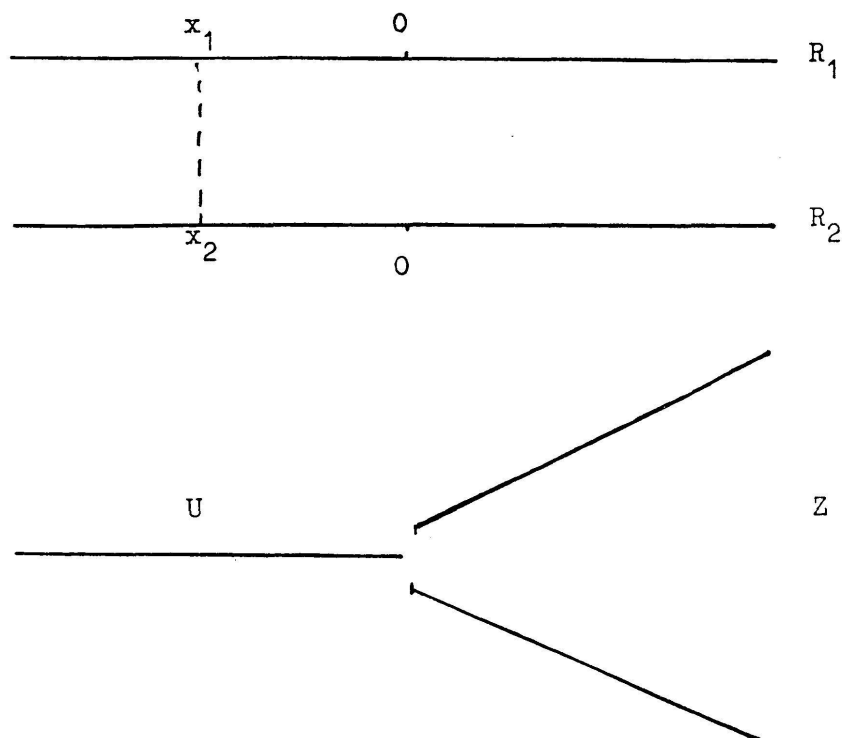


FIG. 1

On identifie à  $] -\infty, 0[$  l'ouvert  $U$  de  $Z$  correspondant aux points  $x_1 < 0$  de  $R_1$ .

La donnée d'un fibré en droites localement trivial  $\eta : E \xrightarrow{p} Z$  sur  $Z$  est équivalente à celle d'une application continue  $g$  de  $U$  dans le groupe  $G$  des homéomorphismes de  $\mathbf{R}$ .

2.1 *Proposition.* Pour que l'espace total  $E$  soit séparé il faut et il suffit que pour tout  $y \in \mathbf{R}$  on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  (ou  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty$ ).

2.2 *Exemple.* Si  $g : U \rightarrow G$  est l'application associant à  $x \in ]-\infty, 0[$  la translation  $g_x : y \rightarrow y + \frac{1}{x}$ , l'espace total  $E$  du fibré  $\eta : E \xrightarrow{p} Z$  correspondant à  $g$  est séparé.

On peut aussi vérifier que si  $\eta' : E' \xrightarrow{p'} Z$  est le fibré correspondant à l'application  $g^{-1} \left( g_x^{-1} : y \rightarrow y - \frac{1}{x} \right)$  alors :

- (i)  $\eta$  et  $\eta'$  sont équivalents pour le groupe  $G$ ;
- (ii)  $\eta$  et  $\eta'$  ne sont pas équivalents pour le groupe  $G^+$  des homéomorphismes croissants de  $\mathbf{R}$ ;
- (iii)  $\eta$  et  $\eta'$  sont isomorphes pour le groupe  $G^+$ .

2.3 THÉORÈME [1]. Soient  $\eta$  et  $\eta'$  deux fibrés en droites sur  $Z$  correspondant à deux applications  $g$  et  $g'$  de  $U$  dans le groupe  $G^+$  et ayant des espaces totaux séparés. Pour que  $\eta$  et  $\eta'$  soient équivalents pour le groupe  $G^+$  il faut et il suffit que pour tout  $y \in \mathbf{R}$  on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$ .

Par conséquent les fibrés en droites localement triviaux sur le branchement simple, ayant un espace total séparé, se répartissent en

- 2 classes d'équivalence pour le groupe  $G^+$ ;
- 1 classe d'isomorphie pour le groupe  $G^+$ ;
- 1 classe d'équivalence pour le groupe  $G$ .

### 3. VARIÉTÉS DE DIMENSION 1 SIMPLEMENT CONNEXES

On désigne maintenant par  $X$  une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe.

3.1 *Proposition.* Il existe sur  $X$  un ordre localement isomorphe à l'ordre de la droite réelle  $\mathbf{R}$ .

En effet [2] la variété  $X$  s'étale sur  $\mathbf{R}$ .



Deux tels ordres sur  $X$  sont alors égaux ou opposés. Lorsqu'on a fait choix d'un de ces deux ordres on dit que la variété  $X$  est *ordonnée*.

3.2 *Exemple.* Dans le cas du branchement simple  $Z$  l'identification de l'ouvert  $U$  à l'intervalle  $] -\infty, 0[$  détermine le choix de l'ordre sur  $Z$ .

3.3 *Proposition.* Soit  $Y$  une seconde variété ordonnée, et soit  $h$  une application bijective de  $X$  sur  $Y$ . Pour que  $h$  soit un homéomorphisme il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.

En particulier on peut répartir les homéomorphismes de  $X$  (indépendamment du choix de l'ordre) en deux classes: les homéomorphismes croissants et les homéomorphismes décroissants (cette dernière classe pouvant d'ailleurs être vide comme le montre l'exemple du branchement simple).

#### 4. FIBRÉS EN DROITES

On se restreint maintenant aux fibrés en droites localement triviaux sur  $X$  ayant un espace total séparé (on les qualifiera d'ailleurs simplement de « fibrés en droites »). Un tel fibré a pour groupe structural le groupe  $G$  des homéomorphismes de  $\mathbf{R}$ .

4.1 *Proposition.* Le groupe structural d'un fibré en droites sur  $X$  peut être réduit au groupe  $G^+$  des homéomorphismes croissants de  $\mathbf{R}$ .

4.2 *Hypothèse.* On suppose dans la suite que cette réduction à  $G^+$  est toujours faite.

Soit  $\eta : E \xrightarrow{p} X$  un fibré en droites sur  $X$ .

4.3 *Proposition.* Le choix d'un ordre sur  $X$  est équivalent au choix d'une orientation sur l'espace total  $E$ .

Soit  $\eta' : E' \xrightarrow{p'} X$  un second fibré en droites sur  $X$ , et soit  $(F, f)$ ,  $F : E \rightarrow E'$  et  $f : X \rightarrow X$ , un isomorphisme de  $\eta$  sur  $\eta'$  pour le groupe  $G^+$ . Alors:

4.4 *Proposition.* Pour que  $F$  soit compatible avec les orientations de  $E$  et  $E'$  (correspondant à un ordre sur  $X$ ) il faut et il suffit que  $f$  soit croissant.

Par contre si  $(F, f)$  est seulement un isomorphisme pour le groupe  $G$ ,  $F$  est compatible avec ces orientations si et seulement si  $f$  est décroissant.

## 5. FIBRÉS EN DROITES ET FEUILLETAGES DU PLAN

On a vu que la donnée d'un fibré en droites  $\eta : E \xrightarrow{p} X$  sur  $X$  est équivalente à celle d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  du plan ayant pour espace des feuilles une variété qui peut être identifiée à  $X$ .

La réduction du groupe structural de  $\eta$  au sous-groupe  $G^+$  correspond alors au choix d'une orientation de  $\mathcal{F}$ . Et, ceci fait, le choix d'un ordre sur  $X$  correspond à celui d'une orientation du plan.

On peut distinguer quatre types de conjugaisons pour les feuilletages orientés du plan orienté :

- a) conjugaison des feuilletages non orientés ;
- b) conjugaison des feuilletages non orientés par un homéomorphisme conservant l'orientation du plan ;
- c) conjugaison des feuilletages orientés ;
- d) conjugaison des feuilletages orientés par un homéomorphisme conservant l'orientation du plan.

Soient alors  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux feuilletages (orientés) du plan (orienté). Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont conjugués on peut supposer que leurs espaces des feuilles sont identiques, et qu'il existe un isomorphisme  $(F, f)$  du fibré  $\eta : \mathbf{R}^2 \xrightarrow{p} X$  associé à  $\mathcal{F}$  sur le fibré  $\eta' : \mathbf{R}^2 \xrightarrow{p'} X$  associé à  $\mathcal{F}'$ .

Dans ces conditions les différentes notions de conjugaisons des feuilletages s'interprètent en termes d'isomorphismes de fibrés en droites au moyen des correspondances suivantes :

*premier cas* :  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  induisent le même ordre sur  $X$

- a)  $(F, f)$  est un isomorphisme pour le groupe  $G$  ;
- b)  $(F, f)$  est un isomorphisme pour le groupe  $G$ , et  $f$  est croissant si  $(F, f)$  est un isomorphisme pour le groupe  $G^+$ , décroissant sinon ;
- c)  $(F, f)$  est un isomorphisme pour le groupe  $G^+$  ;
- d)  $(F, f)$  est un isomorphisme pour le groupe  $G^+$  et  $f$  est croissant.

*deuxième cas* :  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  induisent des ordres opposés sur  $X$   
les conclusions sont les mêmes.

## 6. ARBRE ASSOCIÉ A UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 1

6.1 *Définition.* Un point de branchement de  $X$  est un point de  $X$  non séparé d'un autre point de  $X$ .

6.2 *Hypothèse.* On suppose dans la suite que  $X$  est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexe et ordonnée, dont l'ensemble  $B$  des points de branchement est fini (et non vide)<sup>1</sup>).

Si  $B$  a  $n$  éléments le complémentaire  $U = X - B$  est un ouvert séparé de  $X$  ayant  $n + 1$  composantes connexes (toutes homéomorphes à  $\mathbf{R}$ ). L'ordre sur  $X$  détermine alors un ordre sur l'ensemble de ces composantes connexes.

Dans ces conditions on peut associer à  $X$  un graphe ordonné, noté  $\hat{X}$ , de la façon suivante:

(i) l'ensemble des sommets de  $\hat{X}$  est l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert  $U = X - B$ ;

(ii) il existe une arête (ordonnée) d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$  si et seulement si

$$- a < b,$$

$$- a \leq c \leq b \text{ entraîne } c = a \text{ ou } c = b.$$

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les arêtes de  $\hat{X}$  et les points de branchements de  $X$ ; et par conséquent  $\hat{X}$  possède la propriété suivante:

(P) pour toute arête  $\alpha$  de  $\hat{X}$  il existe une arête  $\beta$  de  $\hat{X}$ ,  $\beta \neq \alpha$ , telle que  $\alpha$  et  $\beta$  aient même origine ou même extrémité.

6.3 *Proposition.* Le graphe  $\hat{X}$  est un arbre.

En effet [2] le complémentaire d'un point de  $X$  a deux composantes connexes.

On dit alors que  $\hat{X}$  est l'arbre (ordonné) associé à la variété ordonnée  $X$ .

<sup>1</sup>) Cette hypothèse est par exemple satisfaite pour les feuilletages du plan définis par des équations polynomiales.

6.4 Exemples. Arbres associés aux variétés ayant au plus 4 points de branchement:

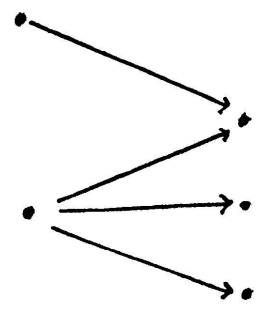
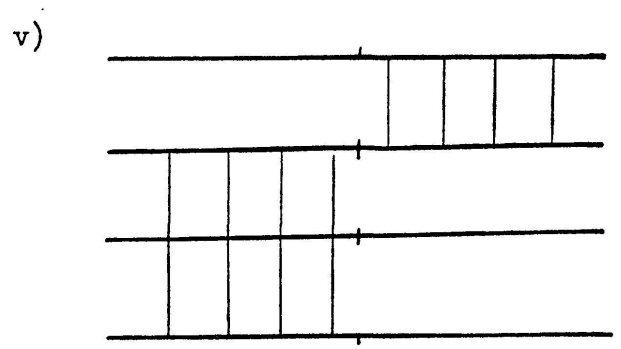
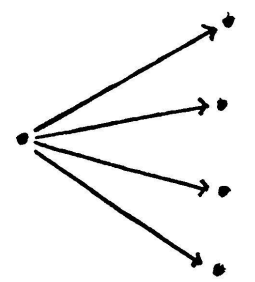
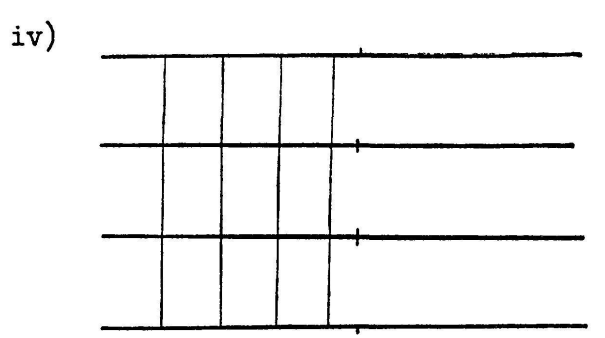
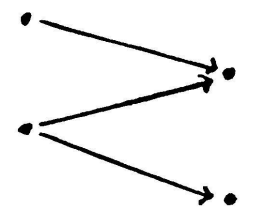
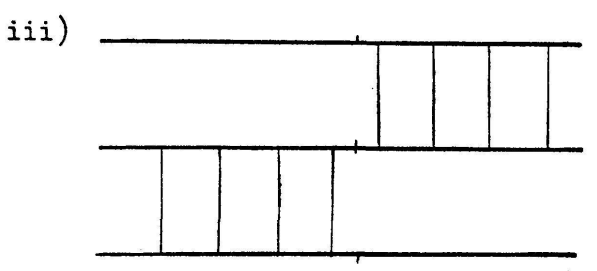
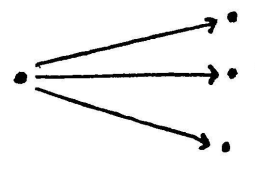
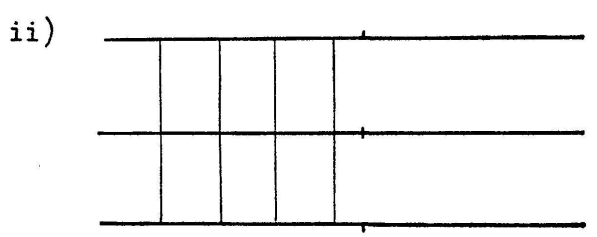
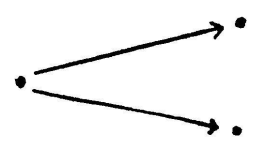
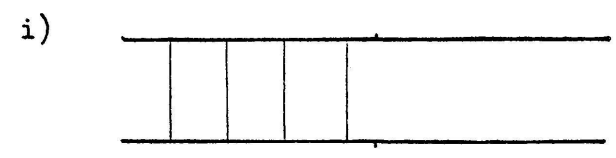


FIG. 2

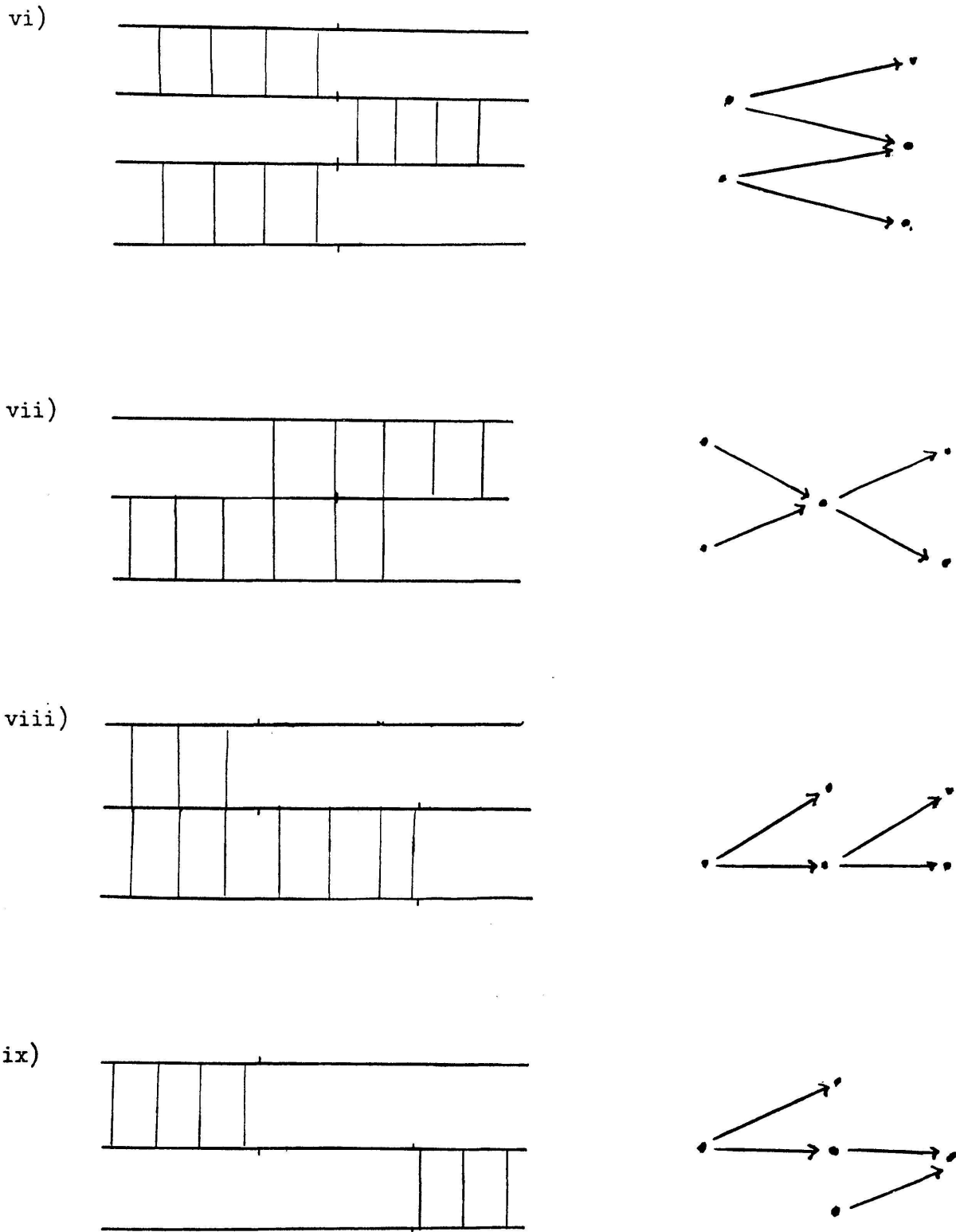


FIG. 2 (suite)

6.5 Proposition. Soit  $Y$  une seconde variété ordonnée, et soit  $\hat{Y}$  l'arbre ordonné associé à  $Y$ . Un homéomorphisme  $f$  de  $X$  sur  $Y$  détermine un isomorphisme  $\hat{f}$  de  $\hat{X}$  sur  $\hat{Y}$ . Si  $f$  est croissant (resp. décroissant) il en est de même de  $\hat{f}$ .

En effet  $f$  transforme l'ensemble des points de branchement de  $X$  en l'ensemble des points de branchement de  $Y$ .

Inversement la donnée d'un arbre ordonné fini  $\hat{A}$  vérifiant la propriété (P) détermine une variété de dimension 1 ordonnée  $A$  ayant un arbre associé isomorphe à  $\hat{A}$  (on construit  $A$  par récurrence sur le nombre de sommets de  $\hat{A}$  en commençant par en ôter un sommet extrémal).

Soit  $\hat{B}$  un autre tel arbre, et soit  $B$  une variété de dimension 1 ayant  $\hat{B}$  pour arbre associé. Un isomorphisme  $\hat{g}$  de  $\hat{A}$  sur  $\hat{B}$  détermine (de façon non univoque) un homéomorphisme  $g$  de  $A$  sur  $B$  tel que  $\hat{g}$  lui corresponde par la construction de 6.5.

Par conséquent :

6.6 THÉORÈME. *La classification des variétés topologiques de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexes, ordonnées, ayant un nombre fini de points de branchement est équivalente à la classification des arbres ordonnés finis vérifiant la propriété (P).*

6.7 Définition. *Un point de branchement  $x$  de  $X$  est simple si l'ensemble  $B_x$  des points  $y \neq x$  non séparés de  $x$  possède l'une des deux propriétés suivantes :*

- a)  $B_x$  est réduit à un seul point ;
- b)  $B_x$  ne contient que deux points distincts qui sont eux-mêmes séparés.

On dit alors que  $X$  est *simple* si tous ses points de branchement sont simples.

Dans ces conditions en chaque sommet non extrémal de l'arbre  $\hat{X}$  associé à  $X$  la configuration est semblable à l'une des trois suivantes :

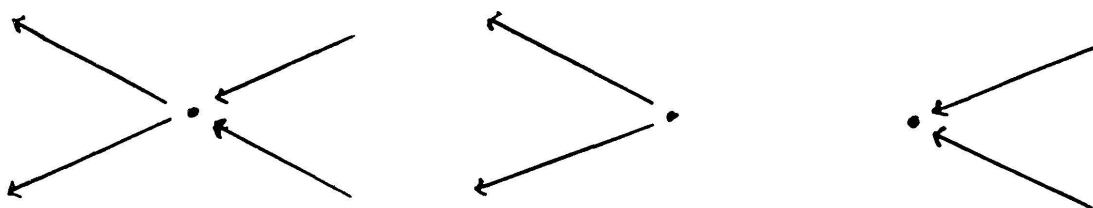


FIG. 3

En particulier les exemples ii), iv) et v) de 6.4 ne sont pas simples.

## 7. CLASSIFICATION DES FIBRÉS EN DROITES

Soient  $x$  et  $y$  deux points non séparés de  $X$ . On peut trouver dans  $X$  un voisinage ouvert  $V$  de  $\{x, y\}$  et un homéomorphisme, croissant ou décroissant (cf. exemple 3.2), de  $V$  sur le branchement simple  $Z$ .

Dans l'arbre  $\hat{X}$  associé à  $X$  ce voisinage  $V$  correspond à un sous-arbre  $\hat{V}$  ayant l'un des deux aspects suivants :

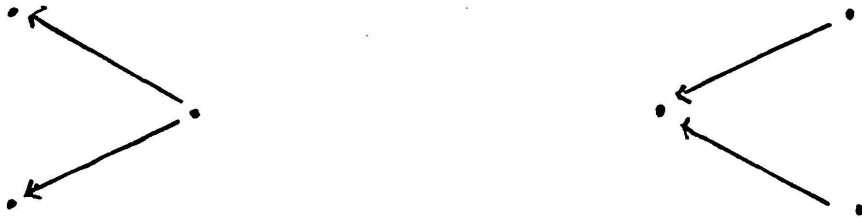


FIG. 4

Par conséquent (proposition 2.1):

7.1 *Proposition.* Soit  $\eta$  un fibré en droites sur  $X$ . A tout couple ordonné  $(\alpha, \beta)$  d'arêtes de  $\hat{X}$  ayant même origine ou même extrémité on peut associer un nombre  $[\alpha, \beta] = \pm 1$  de façon que  $[\beta, \alpha] = -[\alpha, \beta]$ .

7.2 *Définition.* Une assignation sur l'arbre  $\hat{X}$  est une correspondance  $\mathcal{A}$  associant à tout couple ordonné  $(\alpha, \beta)$  d'arêtes de  $\hat{X}$  ayant même origine ou même extrémité un nombre  $\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \pm 1$  de façon que  $\mathcal{A}(\beta, \alpha) = -\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ .

On dit alors que l'assignation de la proposition 7.1 est l'assignation associée au fibré  $\eta$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une assignation sur  $\hat{X}$ , et si  $\hat{f}$  est un automorphisme de  $\hat{X}$ , on désigne par  $-\mathcal{A}$  l'assignation  $(\alpha, \beta) \rightarrow -\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ , et par  $\hat{f}\mathcal{A}$  l'assignation  $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{A}(\hat{f}^{-1}\alpha, \hat{f}^{-1}\beta)$ .

Soient  $\eta$  et  $\eta'$  deux fibrés en droites sur  $X$ , et soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  les assignations correspondantes sur  $\hat{X}$ . On a alors (théorème 2.3):

7.3 THÉORÈME. Si  $\eta$  et  $\eta'$  sont équivalents pour le groupe  $G^+$  (resp. pour le groupe  $G$ ) on a  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}' = \pm \mathcal{A}$ ). Si  $\eta$  et  $\eta'$  sont isomorphes pour le groupe  $G^+$  (resp. pour le groupe  $G$ ) il existe un automorphisme  $\hat{f}$  de  $\hat{X}$  tel que  $\mathcal{A}' = \hat{f} \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}' = \pm \hat{f} \mathcal{A}$ ).

De plus si  $X$  est simple ces conditions sont aussi suffisantes.

Inversement si  $\mathcal{A}$  est une assignation sur  $\hat{X}$  il existe un fibré en droites  $\eta$  sur  $X$  ayant  $\mathcal{A}$  pour assignation (on construit  $\eta$  par récurrence en commençant par ôter un sommet extrémal de  $\hat{X}$ ).

Soient  $\mathcal{A}'$  une seconde assignation sur  $\hat{X}$  et  $\eta'$  le fibré en droites sur  $X$  correspondant à  $\mathcal{A}'$ . Si  $\hat{f}$  est un automorphisme de  $\hat{X}$  tel que  $\mathcal{A}' = \hat{f} \mathcal{A}$  il existe un isomorphisme  $(F, f)$  de  $\eta$  sur  $\eta'$  tel que  $\hat{f}$  soit l'automorphisme de  $\hat{X}$  correspondant à l'homéomorphisme  $f$ .

Par conséquent:

7.4 THÉORÈME. Soit  $X$  une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexe, ayant un nombre fini de points de branchement tous simples. La classification des fibrés en droites sur  $X$  est équivalente à la classification des assignations sur l'arbre  $\hat{X}$  associé à  $X$ .

7.5 Exemple. Dans le cas où  $X$  est la variété de l'exemple iii) de 6.4 il existe

a) en ce qui concerne les fibrés sur  $X$ :

4 classes d'équivalence pour le groupe  $G^+$ ;

2 classes d'équivalence pour le groupe  $G$ ;

3 classes d'isomorphisme pour le groupe  $G^+$ ;

2 classes d'isomorphisme pour le groupe  $G$ ;

b) en ce qui concerne les feuilletages du plan orienté ayant  $X$  pour espace des feuilles (cf. § 5):

2 classes de conjugaison pour les feuilletages non orientés;

5 classes de conjugaison orientée pour les feuilletages non orientés;

5 classes de conjugaison pour les feuilletages orientés;

6 classes de conjugaison orientée pour les feuilletages orientés.



RÉFÉRENCES

- [1] GODBILLON, C. et G. REEB. Fibrés sur le branchement simple, *Ens. Math.*, 12, 1966, pp. 277-287.
- [2] HAEFLIGER, A. et G. REEB. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *Ens. Math.*, 3, 1957, pp. 107-125.
- [3] KAPLAN, W. Regular curve-families filling the plane:  
Part I: *Duke Math. J.*, 7, 1940, pp. 154-185;  
Part II: *Duke Math. J.*, 8, 1941, pp. 11-46.
- [4] WHITNEY, H. Regular families of curves, *Ann. of Math.*, 34, 1933, pp. 244-270.

(Reçu le 10 avril 1972)

Claude Godbillon

Institut de recherche mathématique avancée  
Laboratoire associé au C.N.R.S.  
Université Louis Pasteur  
7, rue René-Descartes  
F-67 — Strasbourg