Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉTAPES ET LES ASPECTS MULTIPLES DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

Autor: Brelot, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45358

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES ÉTAPES ET LES ASPECTS MULTIPLES DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

par M. BRELOT

1. La théorie du potentiel qui n'était d'abord qu'un chapitre de physique mathématique, a posé depuis cent cinquante ans des problèmes mathématiques difficiles et délicats qui ont attiré les mathématiciens les plus célèbres comme Gauss, Hilbert ou Poincaré. Elle a suscité l'introduction ou les développements de méthodes et d'outils nouveaux de grande portée (méthodes variationnelles de Gauss-Dirichlet-Hilbert, distributions de Schwartz, capacité et théorie des éléments extrémaux de Choquet...). Elle s'est renouvelée par la topologie, approfondie et surtout élargie en axiomatiques diverses dont certaines s'appliquent à de vastes classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre et elle s'est soudée aux probabilités par les processus de Markov; elle devient aussi en partie un chapitre d'analyse fonctionnelle.

Sa richesse considérable et sa diversité, sa croissance explosive depuis une douzaine d'années, ses applications, son rôle de modèle en Analyse suggèrent de faire un bilan historique que l'on va tenter ici. On le réduira à ses grandes lignes car les publications sont trop nombreuses, il est peu utile de détailler encore la période ancienne et malaisé de le faire brièvement et clairement pour les travaux récents; cela implique un choix difficile et un peu arbitraire et l'omission d'un grand nombre de publications et d'auteurs, mais on renverra à des bibliographies partielles plus complètes.[1])

---

[1]) De tels exposés ont déjà été publiés autrefois dans l'énorme *Encyclopédie allemande* [60] et [160] (avant 1918), dans l'ouvrage célèbre de Kellogg *Foundations of potential theory* [142] (1929) et comme article historique [45], assez détaillé pour la période de 1920 à 1950 environ, dans les *Annales de l'Institut Fourier* (1952-54).

Voir un exposé global récent mais bref, en anglais, comme introduction à une série de cours à Stresa (1969) dans le cadre du CIME [2], et, pour la partie moderne, des exposés partiels mais plus détaillés de C. Constantinescu, en allemand [76] (1966) et en anglais [78] (1969). On consultera naturellement les volumes des Congrès et Séminaires indiqués au début de la bibliographie, contenant bien des travaux non mentionnés dans le texte, volumes auxquels on renverra souvent directement pour abréger la bibliographie par auteurs. Ainsi [3 t 6] signifiera séminaire [3] tome 6.

Enfin on trouvera de larges bibliographies, souvent commentées, dans des ouvrages récents comme mes deux cours de Bombay, [49] 2e édit. 1967 et [56] en anglais, les ouvrages, surtout de théorie classique, de Brelot [50] (en français traduit en russe), Helms [126] et du Plessis [188] en anglais, Landkoff [147] en russe pourvu d'une abondante bibliographie russe.

Nous indiquerons quatre périodes avec les idées dominantes.

2. Période classique ancienne (jusque vers la première guerre mondiale). — *De Gauss à Poincaré. Les grands problèmes.*

La théorie du potentiel n'était encore vers 1800 que des études sur l'électrostatique et l'attraction newtonienne. Mais on utilisait l'équation de Laplace étendue par Poisson (1813), qui donna par ailleurs vers 1820 sous une forme préliminaire l'intégrale qui porte son nom, pour une boule; la fonction de Green apparut bientôt (1828), mais c'est seulement en 1840 que Gauss publia un mémoire capital [120], en avance d'un siècle sur les outils nécessaires et qui traitait dans $\mathbf{R}^3$ trois problèmes qui restent fondamentaux:

— *problème de l'équilibre* (appelé souvent plus tard problème de Robin), cherchant sur un « conducteur » Σ, frontière d'un domaine borné, la distribution d'une masse donnée pour que le potentiel soit constant sur Σ; elle correspond à un minimum de l'énergie.

— *problème du balayage*, ainsi appelé depuis Poincaré, qui consiste à partir de masses sur ω (resp. $\complement\overline{\omega}$) à en trouver d'autres sur Σ fournissant le même potentiel sur $\complement\overline{\omega}$ (resp. sur ω). C'est la traduction du phénomène d'influence électrostatique, où des masses intérieures à un conducteur relié au sol, font apparaître sur le conducteur des masses dont le potentiel extérieur annule celui des masses intérieures;

— *problème de Dirichlet*, ainsi appelé plus tard par Riemann, qui consiste à chercher dans ω une fonction harmonique, c'est-à-dire solution de l'équation de Laplace prenant sur la frontière les valeurs d'une fonction réelle finie continue donnée. Rappelons le fait élémentaire que l'unicité d'une solution possible vient de l'impossibilité d'un maximum ou minimum d'une fonction harmonique en un point, sauf constance au voisinage, ce qui entraîne qu'elle majore dans un ouvert borné par exemple le inf. des lim. inf. à la frontière (principe élémentaire du minimum; de même avec le maximum et cela est fondamental, avec des variantes, en théorie générale du potentiel). Mais l'existence d'une solution est difficile à établir et discuter.

Ces études qui sont liées étroitement étaient basées dans $\mathbf{R}^3$ sur l'intégrale d'énergie $\int U^\mu \, d\mu$ ou même $\int (U^\mu - 2f) \, d\mu$ où U^μ désigne le potentiel $\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$ de la mesure $\mu \geqslant 0$. En fait Gauss ne considérait que les mesures

ayant une densité et admettait, ce qui est inexact sans restrictions, que les intégrales atteignaient leur minimum pour un μ dont le total était imposé.

Ces questions ont été adaptées plus tard dans le plan en remplaçant le potentiel newtonien précédent par le potentiel (dit logarithmique par Neumann) basé sur le noyau $\log 1/|x-y|$ (déjà introduit en fait par Laplace à propos du potentiel newtonien de cylindres homogènes parallèles).

3. L'insuffisance de rigueur par manque de notions nécessaires comme la mesure générale et l'intégrale de Radon, ce qui ne permettait pas d'introduire facilement les restrictions et précisions indispensables, fit laisser de côté pendant longtemps les problèmes traités par Gauss sauf celui de Dirichlet, problème aux limites-type, dont on donna d'abord d'autres solutions également non satisfaisantes. Ainsi dans sa célèbre dissertation inaugurale, Riemann [194] reprenant des idées de Gauss-W. Thomson (Lord Kelvin)-Dirichlet considérait l'*intégrale de Dirichlet* $\int \operatorname{grad}^2 u\, dx$ (mesure volume ou aire dx) pour les u assez régulières prenant des valeurs données à la frontière; lorsque le minimum est atteint u est harmonique et vaut la solution cherchée; mais cela donne lieu aux mêmes objections que plus haut et elles n'ont été surmontées, dans ce cas, avec des restrictions convenables, que par Hilbert vers 1900 [131], ce qui a inspiré la solution approfondie de Lebesgue [153] explicitée dans le plan. *D'autres méthodes, rigoureuses*, furent données entre temps. Citons le procédé alterné de Schwarz ([198] t 2 p. 133) permettant de passer de deux domaines se prêtant à une solution (comme des boules) à leur réunion, sous certaines conditions (d'où la résolutivité pour un domaine approchant arbitrairement un domaine donné). Citons surtout la méthode basée sur l'usage des potentiels de double couche (sur la frontière supposée assez régulière), d'abord selon Neumann puis par une méthode de Fredholm [114] dont est issue sa célèbre théorie (laquelle permet aussi avec une simple couche, de traiter le « problème de Neumann » où la donnée est la dérivée normale). Mentionnons les résultats de Harnack [125] sur les familles de fonctions harmoniques et ses célèbres inégalités; insistons sur la solution du problème de Dirichlet par la méthode du balayage de Poincaré (1887) (voir son ouvrage [189]). On se ramène par approximation à une donnée qui se prolonge selon une fonction Φ de type C^2 avec $\Delta\Phi \geqslant 0$ au moins dans un voisinage de $\overline{\omega}$ (c'est-à-dire une fonction dite plus tard sous-harmonique). On imagine la modification d'une fonction dans ω par son remplacement dans une boule $b \subset \bar{b} \subset \omega$ par son intégrale de Poisson. On recouvre ω par une suite de boules b_i et on procède à partir de Φ aux modifications dans b_1, puis b_2, puis b_1, b_2, b_3, etc., des fonctions

obtenues successivement. Cela donne à la limite une fonction harmonique qui prendra les valeurs de Φ à la frontière $\partial\omega$ moyennant des restrictions (p. ex.: la condition dite souvent de Poincaré, en fait dégagée par Zaremba, de l'existence pour tout $x \in \partial\omega$ d'un cône de révolution de sommet x et extérieur à ω). Noter que dans un voisinage de $\overline{\omega}$, Φ vaut à une fonction harmonique près un potentiel Φ_0 de masses $\leqq 0$ (à densité $\Delta\Phi$ à un facteur près d'après la formule de Poisson). L'opération de modification dans b_1, revient à changer les masses correspondant à Φ_0 et situées, dans b_1, en d'autres masses sur ∂b_1, conservant le potentiel sur $\complement b_1$. C'est là un « balayage » déjà mentionné, et les modifications successives correspondent à de tels balayages.

Soulignons que toutes les solutions rigoureuses du problème de Dirichlet comportaient des restrictions sur la frontière; elles paraissaient dues aux méthodes employées d'où la multiplicité des solutions, mais elles étaient en fait inévitables comme l'ont remarqué Zaremba (1910) avec un point frontière isolé et Lebesgue (1912) [154] avec un domaine dont le complémentaire présente une pointe convenable (épine de Lebesgue).

L'analyticité des fonctions harmoniques et leurs singularités, les relations de ces fonctions avec les séries trigonométriques, les fonctions de Laplace et Legendre, la correspondance conforme et la transformation de Kelvin sont d'autres questions anciennes que l'on trouve développées dans les vieux traités d'analyse, comme celui de Picard, mais qui ont été approfondies plus tard. De même pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique (et même un peu de type parabolique) qui donnent lieu à des problèmes analogues (voir les articles très détaillés de l'*Encyclopédie allemande* [60, 160, 161].

4. Deuxième période (à peu près l'entre-deux guerres). — *Consolidation de la théorie classique par l'usage de la mesure et de la capacité.*

Fatou [111] avait illustré déjà en 1906 l'intégrale de Lebesgue pour approfondir dans le disque l'étude à la frontière de l'intégrale de Poisson (existence de limites angulaires p.p., pour une donnée bornée intégrable de l'arc, ce qui a été beaucoup étendu plus tard).

L'intégrale de Radon (1913) allait être l'instrument-clef de théorie du potentiel, aussitôt utilisé systématiquement d'abord par G. C. Evans [107, 108], F. Riesz, De La Vallée Poussin, pour étudier le potentiel général $\int h(|x-y|)\, d\mu(y)$ à noyau h logarithmique ou Newtonien.

La capacité inspirée par l'électrostatique, précisée d'abord par Wiener [216] (1924) allait compléter le rôle de la mesure. On peut dans $\mathbf{R}^3$ définir

la capacité d'un compact K selon De La Vallée Poussin [149] comme la borne supérieure des masses $\geqslant 0$ qu'on peut distribuer sur K (mesure sur K) de façon que le potentiel soit $\leqslant 1$. La théorie dans $\mathbf{R}^2$ donne lieu à des différences (et à une notion spéciale de capacité logarithmique) à cause de l'allure du noyau logarithmique $\log 1/|x-y|$ non toujours $\geqslant 0$ comme le noyau newtonien $1/|x-y|$ (voir plus tard [115] ou un ouvrage différé de De La Vallée Poussin [152]). Mais on peut opérer de même manière par exemple avec la fonction de Green (noyau de Green) dans une boule ou disque, ou plus généralement dans un domaine de Green ω, c'est-à-dire où existe une fonction de Green (d'ailleurs symétrique) qui est la fonction minima $G_y(x)$ (ou $G(x, y)$) valant au voisinage de y le noyau $h_y(x) = h(|x-y|)$ à une fonction harmonique près et harmonique > 0 ailleurs. On opère alors avec le « potentiel de Green » $\int G(x, y)\, d\mu(y)$ $(\mu \geqslant 0)$; cela est dans ω partout $+\infty$ ou fini sur un ensemble dense et dit alors vrai potentiel de Green. D'autre part est apparue la notion de « diamètre transfini » d'un ensemble fermé (Fekete-Polya-Szegö [112, 190]) à propos d'équations algébriques et Szegö montra son identité avec la capacité précédente newtonienne ou logarithmique. On a discuté plus tard d'adaptation à $\mathbf{R}^n$ et de généralisations.

Remarquer maintenant qu'on peut définir dans un domaine de Green (p. ex. $\mathbf{R}^3$) la capacité intérieure d'un ensemble quelconque (appelée capacité et seule utilisée pendant longtemps) comme sup des capacités des compacts contenus, c'est-à-dire en procédant comme pour la mesure. On avait vite remarqué l'importance de la notion de capacité nulle (plus forte que celle de la mesure de Lebesgue intérieure 0), soulignée aussi plus tard (1936) par la caractérisation selon G. C. Evans [110] (et Selberg indépendamment) d'un compact K de capacité nulle dans $\mathbf{R}^3$ comme lieu des infinis du potentiel d'une mesure $\geqslant 0$ convenable sur K, ce qui a été plus tard étendu aux ensembles G_δ par Deny et Choquet [69]). Mais l'incommodité de la notion de capacité intérieure conduisit enfin (1940) simultanément Brelot [36], Beurling [21] et Monna à introduire et utiliser la capacité extérieure, analogue à la mesure extérieure.

5. F. Riesz [195] en approfondissant l'étude des modules des fonctions holomorphes $f(z)$ fut conduit vers 1924 à introduire les *fonctions subharmoniques* (dites maintenant sous-harmoniques, les opposées étant appelées surharmoniques) dans des ouverts de $\mathbf{R}^2$, l'extension étant facile en fait dans $\mathbf{R}^n$; elles étaient d'abord finies continues majorées dans chaque boule par la moyenne périphérique au centre, ou de façon équivalente par l'inté-

grale de Poisson partout (un cas particulier est justement $|f(z)|$ dans $\mathbf{R}^2$); puis il remplaça la continuité par la semi-continuité supérieure avec la condition pour la fonction u: $u < +\infty$ et finie p.p. (ce qui équivaut à u finie sur un ensemble dense). Sans cette dernière condition la fonction est dite aujourd'hui hypoharmonique et dans tout domaine partiel peut être $-\infty$. Les opposées dites surharmoniques resp. hyperharmoniques satisfont au principe-frontière du minimum.

Outre l'utilité directe et multiple de cette nouvelle notion, son importance vient de ce qu'une fonction surharmonique est caractérisée localement comme un potentiel de mesure $\geqslant 0$ à noyau $h(|x-y|)$ (newtonien ou logarithmique) à une fonction harmonique près. Dans un domaine de Green où u surharmonique admet une minorante harmonique cela vaut un (vrai) potentiel de Green plus la plus grande minorante harmonique (dont la nullité caractérise la propriété que u est un potentiel). Le cas des C^2-fonctions est facile grâce à l'équation de Poisson mais le passage au cas général est délicat, même encore dans le petit livre de T. Radò [193] (1937) qui rassemble les connaissances d'alors sur les fonctions sous-harmoniques (voir aussi Privaloff [192]). Les distributions de Schwartz ont permis plus tard d'étendre les démonstrations élémentaires, et le théorème de Choquet sur les éléments extrémaux donne aujourd'hui une démonstration qui s'applique aux axiomatiques locales; on reviendra sur ces questions.

Cette équivalence locale ou globale m'a incité à ramener des problèmes de potentiel comme le balayage à des problèmes sur les fonctions sous ou surharmoniques, que l'on pouvait résoudre par des méthodes de modification, d'extrémisation de ces fonctions: méthodes qui ont donné des résultats nouveaux (p. ex. [33] 1938) et se sont trouvées naturellement adaptables plus tard à des théories sans noyau. Dans cet ordre d'idées j'ai introduit en 1941 [37], pour remplacer la capacité intérieure nulle, la notion d'ensemble polaire e dans $\mathbf{R}^n$, définie par l'existence d'une fonction surharmonique u dans $\mathbf{R}^n$, valant $+\infty$ au moins sur e (ce qui a le caractère local et équivaut dans un domaine de Green $\omega \supset e$ à la même condition avec $u > 0$). Peu après Cartan [64] montra (ce qui paraît naturel après la caractérisation de Evans des compacts de capacité nulle) qu'il y a identité avec les ensembles de capacité extérieure nulle définie dans ω. Ce type d'ensemble jouera le rôle des ensembles de mesure nulle en théorie de l'intégration. On dit d'ailleurs quasi partout au lieu de sauf sur un ensemble polaire.

6. Parallèlement aux travaux de F. Riesz était approfondi *le problème de Dirichlet*. Son impossibilité en général amenait Lebesgue puis Wiener [216] (1924) à décomposer le problème en deux: l'un toujours résoluble pour une donnée-frontière f finie continue (p. ex. un domaine borné $\omega \subset \mathbf{R}^n$) avec une solution dite « généralisée »; l'autre est l'étude à la frontière de cette solution. Wiener introduisit cette solution de deux manières différentes; l'une considère la limite de la solution classique pour un ouvert contenu approchant ω, à la frontière assez régulière et une donnée prolongeant continûment f (idée déjà utilisée par Bouligand pour définir la fonction de Green dans le cas général); l'autre manière plus importante [218] (1925) est inspirée de la résolution du problème classique donnée par O. Perron [186] (1923) (et trouvée indépendamment par Remak) qui s'appliquait en fait sous les conditions exactement minima. Voici l'idée, généralisée plus tard à une donnée-frontière f réelle quelconque: on considère l'enveloppe inférieure (inf. en chaque point) de l'ensemble des fonctions hyperharmoniques satisfaisant en tout point frontière X à la condition

$$\liminf u \begin{matrix} \geqslant f(X) \\ > -\infty \end{matrix}.$$

Cette enveloppe $\overline{H}_f$ est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

On introduit $\underline{H}_f = -\overline{H}_{-f}$; alors $\underline{H}_f \leqq \overline{H}_f$.

S'il y a égalité avec valeur commune finie donc harmonique notée H_f, f est dite résolutive et H_f solution (généralisée). C'est le cas où f est finie continue (résultat difficilement établi par Wiener); aujourd'hui cela est facile et l'on voit que $H_f(x)$, fonctionnelle linéaire croissante s'écrit $\int f\, d\rho_x{}^\omega$ (avec mesure unitaire $d\rho_x{}^\omega$ dite mesure harmonique), représentation qui ne fut établie que plus tard par De La Vallée Poussin [149, 151] à l'aide du balayage de la mesure de Dirac.

Bien des méthodes conduisent à cette solution généralisée H_f (voir [210]) mais il importe surtout d'en étudier l'allure à la frontière, ce qui fit approfondir la notion de point-frontière régulier X (Lebesgue), défini par la condition que $H_f(x) \to f(X)$ lorsque $x \in \omega$, $x \to X$, $\forall f$, finie continue sur $\partial\omega$. Si tous les points-frontière sont réguliers, le problème classique est toujours résoluble et réciproquement. On a donné bien des critères suffisants de régularité, comme la condition déjà signalée de Poincaré-Zaremba. Indiquons deux critères nécessaires et suffisants:

a) L'existence d'une « barrière de Lebesgue » améliorée par Bouligand selon l'existence d'une fonction surharmonique > 0 au voisinage de X sur ω, tendant vers 0 en X (ce critère s'étendra aux axiomatiques futures).

b) Célèbre critère de Wiener [217] utilisant la capacité, trop euclidien pour de larges extensions; par exemple dans $\mathbf{R}^3$, si δ_n est l'intersection de $\complement\,\omega$ avec le lieu $\rho^{n+1} \leqq |\,x - X\,| \leqq \rho^n$, $(X \in \partial\,\omega, 0 < \rho < 1)$ et γ_n la capacité, alors la série de terme général γ_n/ρ^n diverge ou converge selon que X est régulier ou non.

Il était essentiel d'apprécier l'ensemble des points irréguliers. C'était un problème, difficile au début, résolu seulement en 1933 par G. C. Evans [109] (après Kellogg dans $\mathbf{R}^2$). L'ensemble en question est de mesure harmonique nulle et même en fait polaire. La démonstration de Evans contenait d'ailleurs en fait le résultat important suivant dégagé à la fois par lui-même et par Vasilesco: la continuité d'un potentiel en un point du support fermé des masses ($\geqslant 0$) sur ce support entraîne la continuité en ce point dans l'espace. Voir un historique sur la régularité en 1938 dans [212].

7. Trois autres importantes questions furent encore traitées en 1935-40:

α) D'abord *Frostman* [115] en 1935, inspiré souvent par M. Riesz et de De La Vallée Poussin, *rendit précis et rigoureux le fameux travail de Gauss* en affaiblissant les résultats par l'introduction d'ensembles exceptionnels de capacité (intérieure) nulle, en fait polaires. L'existence des solutions est établie grâce à la convergence faible des mesures (dite maintenant, d'après Cartan, convergence vague). L'unicité s'appuie sur deux résultats importants dans $\mathbf{R}^3$:

a) L'énergie d'une mesure $\mu = \mu_1 - \mu_2$ à support compact, qui s'écrit $\int U^\mu\, d\mu$ peut se définir en remplaçant le noyau par inf. $(1/|\,x - y\,|, N)$ et faisant tendre N vers $+\infty$ ou à partir d'un développement formel comme $\int U^{\mu_1}\, d\mu_1 + \int U^{\mu_2}\, d\mu_2 - 2 \int U^{\mu_1}\, d\mu_2$ (en notant que $\int U^{\mu_1}\, d\mu_2 = \int U^{\mu_2}\, d\mu_1$ si les énergies de μ_1, μ_2 sont finies). Le *principe d'énergie* dit que l'énergie est $\geqslant 0$ et nulle seulement si $\mu \equiv 0$.

b) Le second résultat appelé *principe du maximum* dit que U^μ pour $\mu \geqslant 0$ à support compact est majoré par le sup. de U^μ sur le support (ce qui dans le cas de U^μ continue équivaut au principe élémentaire du maximum des fonctions harmoniques).

Noter que Frostman traite d'abord de cas d'une frontière assez régulière. L'adaptation à $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ et à des noyaux $\varphi\,(r)$ généraux est facile mais avec quelque changement. La capacité est approfondie, à nouveau comparée au

diamètre transfini d'ailleurs généralisé, comparée aussi à la mesure de Hausdorff et utilisée en théorie des fonctions (à ce stade de la capacité, voir un historique [211], 1937). Enfin Frostman [115] considère aussi les noyaux $r^{-\alpha}$ déjà approfondis par M. Riesz dans une étude importante en soi et pour l'avenir des théories globales du potentiel (voir la publication, différée, dans [196]).

β) La deuxième question concerne *la convergence des fonctions surharmoniques*. On a d'abord montré (Szpilrajn-Radò [193]) qu'une suite décroissante bornée inférieurement converge vers une fonction qui vaut une fonction surharmonique sauf sur un ensemble e de mesure de Lebesgue nulle. Ensuite j'ai établi [34] (1938) que cet ensemble e est même (localement) de capacité intérieure nulle. Peu après en 1942, Cartan montrait en utilisant l'énergie (voir les détails dans [64]) que la capacité même extérieure est nulle (c'est-à-dire que e est polaire) et étendait le théorème aux ordonnés filtrants décroissants. Cela devenait un théorème-clef de la théorie fine du potentiel, dont on a donné depuis des variantes plus ou moins fortes et des démonstrations variées sous des hypothèses axiomatiques plus ou moins faibles (voir des cours récents comme [49, 50]).

γ) La troisième question concerne le *problème de Dirichlet* pour une donnée quelconque f sur la frontière $\partial\omega$ d'un domaine par exemple borné. J'ai montré [35] (1939) que la *résolutivité équivaut à la sommabilité de f* par rapport à la mesure harmonique $d\rho_x^\omega$, ce qui est indépendant de $x \in \omega$. Cela se conservera dans les axiomatiques ultérieures.

En théorie des fonctions la mesure harmonique et le problème de Dirichlet étaient utilisés depuis longtemps dans des cas plus ou moins étendus (voir par ex. Beurling [20], Nevanlinna, Privaloff...). Ils allaient devenir, ainsi que toute la théorie du potentiel, un instrument général. Voir des articles de Brelot (Soc. Royale des sciences de Liège 1939), de Monna, Bolder, etc., vers 1940 à l'Académie des Sciences d'Amsterdam, et aussi Beurling [21], plus tard Dufresnoy (Bull. Sc. Math. 1945)...

8. Bien d'autres questions restent à mentionner dans cette période: singularités des fonctions harmoniques (historique dans [31]) et des fonctions sous-harmoniques [32], recherches de Bouligand [29, 30], précurseur sur bien des points; approfondissement des fonctions polyharmoniques (Nicolesco [179]); perfectionnement du problème de Neumann; étude d'un problème de Dirichlet pour compact K (Keldych-Lavrentieff [140, 141]

et Brelot (mémoires repris plus tard dans [41])) introduisant les points stables analogues aux points réguliers et liée à l'approximation sur K d'une fonction finie continue par une fonction harmonique sur un voisinage de K; rôle des points irréguliers dans la résolubilité (Keldych [140], Landkoff); extension de questions comme le problème de Dirichlet généralisé à des équations du second ordre de type elliptique; et des questions qui se rattachent déjà à l'esprit de la période suivante: introduction d'espaces de Hilbert par O. Nikodym [180] au sujet du principe de Dirichlet, approfondi par Zaremba [219]; introduction de frontières plus raffinées que la frontière euclidienne pour le problème de Dirichlet (frontière « ramifiée » [42] initiée par Perkins [185] et De La Vallée Poussin [150]).

9. Troisième période (prémoderne: environ 1940-1955). — *Renouvellement par la topologie.*

Sans énumérer les multiples perfectionnements ou applications de la théorie antérieure (nombreux articles depuis trente ans de M. Arsove (dont un ouvrage de théorie classique est à l'impression), de Beckenbach, Dinghas, Hayman, Weinstein, Huber, Reade, Hardy-Rogosinki, Landkoff... Voir par exemple [11, 215, 137, 146] et en France des articles également disparates de Deny [86], Choquet-Deny [73], Deny-Lelong [91], Brelot-Choquet [58] etc.) signalons des inégalités et estimations numériques ingénieuses sur la capacité et l'intégrale de Dirichlet dans un ouvrage de Polya-Szegò [190], mais détaillons surtout des idées nouvelles et importantes:

a) L'énergie, déjà fort utilisée, fut rénovée par H. Cartan [63, 64, 65] (qui s'en servit d'ailleurs pour obtenir la forme définitive du théorème de convergence des fonctions surharmoniques). Explicitant le cas de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) ou d'un disque dans $\mathbf{R}^2$, il introduit la norme-énergie, un produit scalaire de deux mesures $\int U^\mu \, d\nu$ convenablement précisé et montre que dans *l'espace préhilbertien* correspondant $\mathscr{E}$ des mesures dans $\mathbf{R}^n$ l'ensemble $\mathscr{E}^+$ des mesures $\geqslant 0$ est complet. D'où les notions de convergence forte ou faible. Le balayage classique pour un compact est interprété comme une projection dans l'espace préhilbertien. Mais $\mathscr{E}$ n'est pas complet. Il le devient dans la théorie de Deny dans $\mathbf{R}^n$ [87] (1950), théorie de l'énergie où le noyau est une distribution de Schwartz N, la mesure remplacée par une distribution variable T, le potentiel remplacé par la convolution. L'énergie est $\int \mathscr{N} \, |\mathscr{T}|^2 dx$ (dx mesure de Lebesgue, $\mathscr{N}$ et $\mathscr{T}$ fonctions transformées de Fourier de N et T sous des conditions convenables). Cela interprète et généralise les

potentiels de double couche du magnétisme et est lié à l'étude des fonctions BL et BLD (Beppo-Levi-Deny) qui prolongent les C^1-fonctions d'intégrale de Dirichlet finie.

b) Bien des raisonnements de Frostman pouvaient visiblement s'étendre à des *espaces topologiques* et des *noyaux-fonctions plus généraux*. D'où des développements de ce type en France, tentatives non publiées puis travaux importants de H. Cartan [63] déjà en 1941, sur un groupe topologique avec composition de mesures, énergie, principe du maximum, et plus tard dans [66], enfin une étude sans énergie (Deny [88]), et d'autre part au Japon, par extensions successives du cas euclidien (Kametani, Kunugui ([145] avec bibliographie) Ninomya...). A des hypothèses très larges on peut ajouter comme axiomes, la validité de principes plus ou moins forts inspirés de la théorie classique de façon à en imiter les démonstrations. La multiplicité des principes et leur comparaison, la dissymétrie des noyaux possibles conduisirent à beaucoup de développements qui se poursuivent encore aujourd'hui.

c) L'introduction en théorie classique dans $\mathbf{R}^n$ des *ensembles effilés e* en un point x (Brelot, 1940, voir [36]) définis par l'existence d'une fonction surharmonique u au voisinage de x, telle que $\liminf_{y \in e \setminus \{x\}} u(y) > u(x)$ (condition vérifiée plus ou moins conventionnellement si $x \notin \bar{e}$) fut inspirée par des critères d'irrégularité et d'instabilité et permet d'améliorer des propriétés topologiques de Bouligand sur les points-frontière irréguliers; cela conduisit aussitôt H. Cartan à introduire la *topologie fine* qui est la moins fine dans $\mathbf{R}^n$ rendant continues les fonctions surharmoniques locales (car les voisinages fins de x sont les complémentaires des ensembles e effilés en $x \notin e$). Alors les points d'un ensemble où il est effilé (points finement isolés) forment un ensemble polaire (résultat-clef, Brelot [38, 40]); en particulier les ensembles effilés en tout point (ou en chacun de leurs points) sont les ensembles polaires; les points irréguliers ou instables (pour ω ouvert ou K compact) sont caractérisés par l'effilement de $\complement\omega$ ou $\complement K$ (d'où la polarité retrouvée de l'ensemble des points-frontière irréguliers) et le critère d'irrégularité de Wiener s'étend selon un critère d'effilement [36, 38]. Les nouvelles notions fournissent ou précisent des résultats sur l'allure des fonctions surharmoniques, harmoniques ou méromorphes, d'autant mieux que la limite fine en un point x_0 d'une fonction équivaut à la limite euclidienne hors d'un ensemble effilé (convenable) en x_0 (Cartan), ce qui conduit à mieux étudier topologiquement l'effilement. Ainsi, δ étant

un voisinage ouvert d'un point-frontière irrégulier x_0 d'un ouvert ω, une fonction surharmonique sur $\omega \cap \delta$, bornée inférieurement admet une limite fine en x_0; de même pour $v/h\,(|x-x_0|)$ où h est le noyau newtonien ou logarithmique.

Ces notions sont précieuses aussi pour traiter mieux ou autrement, avec la topologie fine, de vieilles questions comme le principe de minimum et le problème de Dirichlet, ou surtout la *théorie du balayage* dont voici une forme définitive dans un domaine de Green ω de $\mathbf{R}^n$ [40]; dans ce mémoire on reprend et on utilise systématiquement (grâce au théorème-clef de convergence (voir plus haut §7, β)) la notion d'extrémisation et d'extrémale d'une fonction surharmonique $u \geqslant 0$ dans ω, relative maintenant à un ensemble *quelconque*; c'est la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant u quasi partout sur son complémentaire e; on dit maintenant *balayée* relative à e. Elle vaut la régularisée par semi-continuité inférieure notée $\hat{R}_u^e$ de la fonction dite maintenant *réduite* R_u^e, inf. des v surharmoniques $\geqslant 0$ majorant u sur e (cette propriété de la balayée est devenue la définition dans les axiomatiques actuelles).

Partons du potentiel u de $\mu \geqslant 0$, à noyau de Green dans ω. $\hat{R}_u^e$ est alors un potentiel caractérisé par sa valeur égale à u quasi partout sur e et la condition que la mesure associée soit portée par la *base* de e, lieu des points où e est non effilé (adhérence fine à un ensemble polaire près).

Sans utiliser le théorème de convergence, Cartan retrouva autrement ce résultat [65] en traitant d'abord les potentiels d'énergie finie.

d) Une définition de *l'harmonicité et surharmonicité au voisinage du point à l'infini* $\mathscr{A}$ de $\mathbf{R}^n$ permet l'adaptation systématique de la théorie classique à des ouverts de $\overline{\mathbf{R}}^n$ (compactifié d'Alexandroff) [39] [2]) et à des *espaces-*$\mathscr{E}$ [57] séparés, localement homéomorphes à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ avec changement de carte isométrique, ou aussi pour $n = 2$, conforme. Cela contient les surfaces de Riemann classiques; s'il y a une fonction de Green, c'est un *espace de Green* qui se traite en gros comme $\mathbf{R}^3$ (y compris pour le balayage).

Mais noter que le point à l'infini de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) n'est pas polaire, donc aussi les points d'un espace-$\mathscr{E}$ dits à l'infini parce que leur image locale est en $\mathscr{A}$. Alors un ensemble e est dit effilé en $x_0 \in e$, si $e \setminus \{ x_0 \}$ est effilé (même définition) et $\{ x_0 \}$ polaire.

---

[1]) Ce qui, en particulier, contient les problèmes de Dirichlet dits « intérieur » et « extérieur ».

10. *e)* La recherche d'une *représentation intégrale* des fonctions harmoniques > 0 comme celle de Poisson-Stieltjes $\int R^{n-2} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^n} d\mu(x)$ ($\mu \geqslant 0$ sur la frontière) dans la boule de $\mathbf{R}^n$, conduisit *R. S. Martin* [167] en 1941, après quelques tentatives en topologie euclidienne, à introduire *d'importantes notions topologiques nouvelles.*

Considérons un domaine Ω de $\mathbf{R}^n$ pourvu d'une fonction de Green G (ou même un espace de Green) et normalisons selon $K(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)}$ (y_0 fixé $\in \Omega$). Alors il existe un espace compact $\hat{\Omega}$ (unique à un homéomorphisme près) où Ω est dense, tel que les fonctions $x \to K(x, y)$ soient prolongeables continûment dans $\hat{\Omega}$ et séparent la frontière $\hat{\Omega} - \Omega = \Delta$ *(espace et frontière de Martin)*. C'est une généralisation naturelle de la frontière des bouts premiers de Carathéodory pour les domaines plans applicables conformément sur un disque (un essai de généralisation géométrique dans $\mathbf{R}^3$ n'avait rien donné d'utile). $\hat{\Omega}$ n'est pas en général comparable à l'adhérence euclidienne mais lui est identique dans les cas simples, comme la boule ou le demi-espace.

On désigne par Δ_1, la partie de Δ, ensemble des points X tels que la fonction correspondante $K(X, y)$ soit minimale c'est-à-dire telle que toute fonction harmonique $\geqslant 0$ minorante lui soit proportionnelle. Alors toute fonction harmonique $\geqslant 0$ admet une représentation unique $u(y) = \int K(x, y)\, d\mu_u(x)$ où μ_u est une mesure $\geqslant 0$ sur Δ, portée par Δ_1.

Si l'on considère dans l'espace des fonctions finies continues sur Ω ou seulement des différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$, pourvu de la topologie de la convergence uniforme locale, le cône H^+ des fonctions harmoniques $\geqslant 0$, la condition $u(y_0) = 1$ (y_0 fixé) détermine une base compacte métrisable dont les éléments extrémaux sont les fonctions minimales égales à 1 en y_0. Cela conduisit plus tard Choquet en 1956 à sa fameuse théorie des éléments extrémaux avec représentation barycentrique [68, 71 et 3, t 5] dont une illustration brillante est justement la représentation de Martin, de technique originale difficile.

f) Cette frontière Δ permet *un problème de Dirichlet* analogue à celui de la frontière euclidienne [47]. Mais on peut traiter aussi ce problème avec d'autres compactifications [47] et le comparer avec le précédent (Naïm [178]) qui apparaît comme privilégié et auquel on peut se ramener. On peut d'ailleurs au lieu des fonctions harmoniques et surharmoniques considérer et traiter de même leurs quotients par une fonction harmonique positive

fixe (*relativisation* du problème [47] qu'on retrouvera en axiomatique ultérieure). Mais l'allure à la frontière demande des notions nouvelles introduites plus tard et sur lesquelles on reviendra. Δ a d'autres avantages, comme de déterminer à un facteur près les fonctions harmoniques > 0 associées à 0 au voisinage de tout $Y \in \Delta$ (c'est-à-dire s'y annulant au sens d'un problème de Dirichlet) sauf pour $X \in \Delta$; c'est alors K_X [44]. C'est le *principe des « singularités positives »* que Bouligand avait beaucoup étudié en frontière euclidienne sans pouvoir trouver un énoncé général (voir Deny [85]).

g) On a aussi considéré des *frontières non nécessairement compactes*, obtenues par complétion d'une métrique compatible avec la topologie, et même des conditions-frontière définies par un *système de filtres* [42, 57]; un exemple est donné par des familles de lignes comme les lignes de Green [57] (tangentes au gradient de $G_{y_0}(x)$) et les limites selon ces lignes (voir des extensions par Ohtsuka dans son ouvrage ultérieur [183]). Il s'y rattache une étude du principe de Dirichlet, autrement que selon Nikodym ou Deny [46].

h) Les applications à la *théorie des fonctions*, aux *surfaces de Riemann et à leur classification commencent* à devenir systématiques. Voir Parreau [184] 1951, avec une importante bibliographie. *Les fonctions plurisous-harmoniques* de P. Lelong [157] sont devenues un instrument très important dans le domaine des fonctions de plusieurs variables complexes.

i) Enfin signalons vers 1953 un effort axiomatique de Choquet [67] pour approfondir et généraliser la notion de *capacité* devenant ainsi un outil fondamental en Analyse, précédant la mesure. On en a même séparé une notion plus large qu'on peut, sans chercher le maximum de généralité et dans un cadre encore un peu topologique, présenter comme une fonction réelle d'ensemble $C(e)$ dans un espace séparé, croissante et admettant le passage à la limite pour des suites croissantes et aussi pour des *suites décroissantes de compacts*. Pour cette « capacité généralisée », un ensemble est dit C-capacitable si $C(e) = \sup C(K)$ pour les compacts K contenus dans e. La théorie donne des conditions de capacitabilité; ainsi, dans le cas classique rappelé plus haut où la capacité extérieure est une capacité généralisée précédente, il y a identité des capacités extérieure et intérieure pour les ensembles boréliens et même analytiques, précieuse propriété.

11. Quatrième période (période moderne: environ 1955-1970). — *Topologies et axiomatiques privilégiées. Aspects probabilistes.*

La complexité du sujet va nous obliger à une plus grande brièveté, à des aperçus encore plus sommaires et plus incomplets.

Mentionnons évidemment les nombreux travaux et ouvrages sur les équations aux dérivées partielles (voir p. ex. [171]) et les résolutions *numériques* modernes pour ces équations. En fait elles s'inspirent de vieux travaux sur l'équation de Laplace et le problème de Dirichlet, utilisant une approximation par des fonctions définies sur des *réseaux* (Le Roux (1914), Philipps et Wiener [187], Bouligand, Mme Lelong [156]). Cela fournit des théorèmes d'existence et conduit à des calculs approchés. Voir l'ouvrage moderne de Temam [208].

Puis indiquons, sans détails, en partie dans l'esprit topologique, quelques prolongements *importants de certaines idées précédentes :* étude dans les espaces d'abord euclidiens des fonctions multiplement ou pluri-harmoniques ou surharmoniques (Avanissian [12], Lelong [158], Bremermann, Noverraz, Hervé [127], Coeuré...), limites angulaires des fonctions harmoniques (Calderon [61], Stein et Weiss [203], Doob, et même, sous restriction, surharmoniques (Arsove-Huber)), raffinements classiques ou abstraits sur la capacité ou l'effilement ou la topologie fine (Choquet [3, surtout t 3; 69; 70], Deny, Sion, Brelot, Getoor, Fuglede [118-119], voir [56]); théorie *semi-classique* où les ensembles de mesure de Lebesgue nulle remplacent les polaires (avec ou sans probabilités (voir Kac et Ciesielski [138-75])); *examen général d'ensembles exceptionnels* (Carleson [62], Doob [103]); relations avec l'analyse harmonique, la théorie ergodique et même la théorie des jeux [1]; l'étude des potentiels besseliens [1, 10]... *Détaillons plutôt :*

a) L'étude axiomatique en *espace topologique* des *noyaux-fonctions* et *noyaux-mesures* a été continuée par Choquet et Deny [3 t1, 3] et divers japonais (Ninomya [3, t3], [181], Ohtsuka, Kishi [144] et [3, t11] avec bibliographie). Mentionnons l'étude des modèles finis [74], les relations entre les principes augmentés de variantes (aperçu général [182]), la recherche de noyaux y satisfaisant, les aspects linéaires de la théorie du potentiel (Choquet et Deny, C. R. Ac. Sc. 1956). Soulignons en espace localement compact l'étude détaillée des noyaux-fonctions symétriques par Fuglede [116]; Durier [104] après son exposé [3, t9] des travaux de Kishi sur les noyaux dissymétriques, qui n'utilisent pas de méthodes variationnelles mais un théorème de point fixe, les améliore et montre des relations avec d'autres théories comme celle des espaces de Dirichlet dont on parlera plus loin.

Dans tout cela les *potentiels continus* jouent souvent un rôle privilégié: ils servent de base dans les recherches et exposés de G. Anger [9] et ses élèves, qui transposent aussi des méthodes de la théorie du potentiel aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

b) La recherche et l'étude des *frontières* se sont prolongées et systématisées (voir l'ouvrage de Constantinescu-Cornea [79]). Citons la *frontière de Kuramochi* où convergent « presque toutes » les lignes de Green, commode pour l'étude des fonctions BLD (voir de nombreux articles au Japon de l'Académie de Tokyo, de l'*Osaka Math. Journal*, etc., et le fasc. 58 des *Lecture Notes* consacré à ce sujet) et aussi la *frontière générale de Choquet* ainsi appelée par Bishop-de Leuw (voir Bauer [13]) qui raffine celle de Šilov, généralise l'étude des éléments extrémaux et a beaucoup de relations et d'applications (voir p. ex. [56, 106]).

12. *Mais la nouveauté topologique qui paraît la plus importante* par ses applications et qui pourrait faire disparaître l'emploi de la topologie Martin qu'elle raffine, est d'abord pour les espaces de Green, un *prolongement de la topologie fine* antérieure.

L'*effilement* (dit maintenant *minimal*) de $e \subset \Omega$ en $X \in \Delta$, d'abord considéré en fait dans le demi-espace en 1949 par Ahlfors-Heins [7] et par Mme Lelong [155] est défini en général par la condition $R^e_{K_X} \neq K_X$ c'est-à-dire qu'il existe une fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant K_X sur e mais non partout, ou qu'il existe un potentiel de Green majorant K_X sur e, ce qui équivaut à la définition originale et notion-clef de L. Naïm [178].

Δ_1 peut être introduite, sans parler de Δ, comme ensemble des fonctions minimales égales à 1 en y_0. On montre qu'il existe sur $\Omega \cup \Delta_1$, une topologie unique induisant la topologie fine sur Ω et donnant comme intersections avec Ω des voisinages de tout $X \in \Delta_1$, les complémentaires des effilés en X. On l'appelle *topologie fine minimale*. Elle est (sur $\Omega \cup \Delta_1$) plus fine (et plus utile) que la topologie Martin. Voir une présentation abstraite générale dans [121, 56]. Dans le cas classique précédent, on peut considérer sur Δ_1 des points irréguliers pour le problème de Dirichlet-Martin, puis « finement irréguliers » en un sens plus faible évident, ce qui permet de voir que leur ensemble est de mesure harmonique nulle. Et cela s'étend aux notions obtenues par relativisation avec une fonction harmonique $h > 0$ [178]. D'autre part v/G_{y_0}, v/K_X ont en tout $X \in \Delta$ (v surharmonique > 0) une limite fine [178]. Et même v/h admet une limite fine finie $d\mu_h$ — p.p. (*résultat fondamental* de Doob [99]) cela s'étend aux fonctions BLD pour $h = 1$

et s'adapte pour tout h. Pour une fonction harmonique > 0 (mais non surharmonique quelconque) dans un demi-espace ou une boule Ω (dont $\hat{\Omega}$ est identifiable à l'adhérence euclidienne) la limite fine entraîne la limite dite non tangentielle ou angulaire [59], ce qui implique les résultats classiques du type Fatou. Tout ceci conduit à *comparer les deux types d'effilement* [1, 51, 56], aussi pour les extensions ultérieures.

Il y a naturellement des *applications à la théorie des fonctions*, comme un perfectionnement du théorème de Plessner et la correspondance de deux surfaces de Riemann (voir des développements de Doob [100-102] et Constantinescu-Cornea (voir surtout leur important livre [78])) qui complètent le gros ouvrage de Tsuji [209] sur les applications plus anciennes de la théorie du potentiel aux fonctions méromorphes. Pour les détails et applications de la topologie fine, d'ailleurs aussi dans la théorie ultérieure, voir [53-55-56].

13. Arrivons *à ce qui caractérise le plus fortement l'époque moderne.* Ce sont des axiomatisations nouvelles poussées et parallèles de divers aspects locaux et globaux du potentiel (harmonicité, énergie), la théorie des noyaux-mesure de G. Hunt qui contient en fait les parties les plus intéressantes des axiomatiques précédentes, les interprétations probabilistes grâce aux processus de Markov, ce qui conduit même à une théorie probabiliste indépendante du potentiel, enfin une discussion approfondie des relations possibles, des analogies, des structures et principes communs à ces théories d'où le problème inverse de bâtir une théorie d'allure potentielle à partir de cônes de fonctions de type très général.

14. Après des tentatives de Tautz [205-206] et Kamke, Doob qui avait déjà, après quelques précurseurs (P. Lévy, Kakutani...) introduit les connexions avec les probabilités, en comparant dans $\mathbf{R}^2$ les fonctions sous-harmoniques et les semi-martingales (dites maintenant sous-martingales) [94], y revient dans des conditions différentes et générales dans un mémoire très important [96] (1954-55) suivi de [96] et où il pose au début *les bases d'une axiomatique* des fonctions harmoniques, en transposant et généralisant l'idée que, dans le mouvement brownien, la probabilité du mouvement à chaque instant est la même dans toutes les directions.

En modifiant le langage et les axiomes de base en vue d'une adaptation systématique de la théorie classique, j'ai été amené en 1957-58 à la théorie suivante [48] [49]: dans un espace connexe, localement connexe, localement compact, non compact Ω (que l'on compactifie selon $\overline{\Omega}$ grâce au point d'Alexandroff), on donne sur chaque ouvert un espace vectoriel de fonctions

réelles finies continues dites harmoniques satisfaisant aux axiomes suivants (de caractère local).

1) (Axiome de *faisceau*); elles définissent un faisceau, c'est-à-dire que toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel et toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω.

2) (Axiome de résolubilité locale du problème de Dirichlet). On appelle régulier tout ouvert relativement compact ω pour lequel toute fonction finie continue réelle f sur $\partial\omega$ se prolonge continuement dans ω de façon unique selon une fonction harmonique, $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. Ce prolongement $H_f(x)$ est de la forme $\int f(y)\, d\rho_x^{\omega}(y)$ ($d\rho_x$ mesure $\geqslant 0$ sur $\partial\omega$, dite mesure harmonique).

L'axiome 2 exprime l'existence d'une *base d'ouverts réguliers* (ou de façon équivalente, de domaines réguliers).

3) (Axiome de *convergence.*) Toute suite croissante u_n de fonctions harmoniques dans un domaine a une limite $+\infty$ ou harmonique (énoncé équivalent avec un ordonné filtrant croissant d'après Constantinescu-Cornea). Cela entraîne *a)* une fonction harmonique $u \geqslant 0$ dans un domaine ω, est partout 0 ou partout > 0. (On le voit en considérant la suite $n \,.\, u$.) *b)* Les fonctions harmoniques > 0 dans ω, égales à 1 en $y_0 \in \omega$ sonté galement continues en tout point (résultat difficile de Mokobodski (voir [54]) mais avec l'hypothèse d'une base dénombrable, hypothèse supprimée plus tard par P. Loeb-B. Walsh [164]). Noter que $(a) + (b)$ équivaut à l'axiome 3 (vu son importance on l'avait introduit comme axiome 3′ impliquant 3).

Principe de minimum. Si dans un ouvert ω existe une fonction harmonique $h > \varepsilon > 0$, alors pour toute fonction harmonique u sur ω, la condition $\liminf u \geqslant 0$ à la frontière implique $u \geqslant 0$. Lorsque les constantes sont harmoniques, on a donc pour toute fonction harmonique u,

$$\inf_{\omega} u = \inf_{\partial\omega} (\text{lim inf. à la frontière})$$

(forme banale du principe).

Noter que les quotients par une fonction finie continue $h > 0$ fixe, définissent un autre faisceau satisfaisant aux axiomes (faisceau des fonctions h-harmoniques). Si h est harmonique, les constantes sont h-harmoniques.

Les fonctions *hyperharmoniques* u dans ω ouvert se définissent comme *s.c.i.* $> -\infty$ majorant sur tout ω' régulier ($\overline{\omega}' \subset \omega$) $\int u\, d\rho_x^{\omega'}$; elles satisfont au principe de minimum comme les harmoniques; dans un domaine u vaut $-\infty$ ou est finie sur un ensemble dense (et alors dite surharmonique).

Lorsque u surharmonique admet des minorantes harmoniques qui sont toutes $\leqq 0$, u est dit un *potentiel* (qui est le potentiel de Green d'une mesure $\geqslant 0$ dans un domaine classique de Green). Un outil commode est la notion de fonction à peu près hyperharmonique, déduite de la précédente en remplaçant *s.c.i.* et $> -\infty$ par « localement bornée inférieurement » et l'intégrale par une intégrale $\overline{\int}$. Cela remplace dans le cas classique une vieille notion de fonction presque sous harmonique. Un ensemble e dans ω ouvert y est dit maintenant *polaire* s'il existe u surharmonique > 0 valant $+\infty$ au moins sur e. Si un ensemble e_0 est localement polaire dans ω, il est polaire dans ω s'il existe un potentiel > 0 dans ω; sinon, mais s'il y a dans ω une fonction harmonique > 0, il existe une fonction surharmonique dans ω valant $+\infty$ sur e_0 (Anandam [8]), ce qui dans la définition originale du cas classique était encore désigné par « polaire »; le terme « localement polaire » correspondant à la notion la plus utile évite tout désaccord.

Noter que Doob supposait la métrisabilité de Ω, les constantes harmoniques et un axiome de convergence plus faible (limite harmonique si elle est finie sur un ensemble dense) complété par une condition permettant d'obtenir une forme de principe élémentaire de minimum indispensable. Pour des suites x_n, où x_{n+1} est choisi sur la frontière d'un domaine régulier $\omega_n \ni x_n$ avec une probabilité égale à la mesure harmonique dans ω_n, il y a un « processus de Markov » (extension du mouvement brownien) dont $\{x_n\}$ est trajectoire, et la « probabilité de transition » celle qui précède. Alors, sous certaines conditions générales, toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ a une limite sur « presque toutes » les trajectoires. C'était le but essentiel de Doob dont la théorie par ailleurs est peu poussée et se développe moins bien que dans celle qui a suivi en théorie pure du potentiel et que j'esquisse maintenant.

L'existence dans Ω d'un potentiel > 0 (qui a lieu dès qu'existent deux fonctions harmoniques > 0 non proportionnelles) et souvent d'une base dénombrable permettent l'extension d'une grande partie de la théorie classique:

— Propriétés de treillis (qui ne demandent pas de dénombrabilité) selon l'ordre spécifique défini par $u \prec v$ signifiant $v = u + f$ et f surharmonique $\geqslant 0$.

— Problème de Dirichlet avec théorème de résolubilité.

— Topologie de l'espace des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ permettant une base compacte métrisable du cône S^+ des fonctions $\geqslant 0$ (ce qui est difficile sans axiome supplémentaire et alors dû à Mme Hervé

[128]), d'où par la théorie des éléments extrémaux, une *représentation intégrale* qui dans le cas classique donne celle de Riesz-Martin.

— Grâce à l'hypothèse de *proportionalité P* des potentiels de support ponctuel $\{x\}$ (c'est-à-dire harmoniques hors $\{x\}$), définition d'un espace et d'une frontière de Martin avec problème de Dirichlet correspondant et forme étendue de la représentation de Martin-Riesz.

— Introduction de la *topologie fine* et du balayage avec des développements ultérieurs utilisant ou non les axiomes supplémentaires qui suivent (Mme Hervé [128] (balayage), Brelot [52] (capacité des ensembles décroissants), Constantinescu-Cornea [77-80], Fuglede [118-119] et Berg (usage et propriétés importantes de la topologie fine).

— Un axiome nouveau D de « domination » (impliquant le principe du maximum du type Frostman) entraîne l'extension du grand théorème de convergence des fonctions surharmoniques (et lui est même équivalent avec P) ce qui permet l'extension de la partie la plus fine du potentiel classique. Tout cela s'applique dans $\mathbf{R}^n$ aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique à coefficients lipschitziens (voir Mme Hervé [128] et l'ouvrage [26]) puis même en un certain sens au cas des coefficients discontinus [129-130] dont la théorie directe est difficile comme on le voit dans Stampacchia [202].

— Les équations adjointes se trouvent axiomatisées dans la théorie du *faisceau adjoint* de Mme Hervé (avec P et un axiome supplémentaire, mais sans D).

Bien d'autres compléments furent donnés. Outre tous ceux déjà cités de Mme Hervé et autres, citons: Boboc-Constantinescu-Cornea (nombreux perfectionnements) [24, 81...], Loeb [163], Loeb-B. Walsh (classification de faisceaux, frontières compactes diverses), K. Gowrisankaran (extension du théorème de Doob sur la limite fine minimale [121-122], le problème de Dirichlet et les pôles des fonctions minimales pour une frontière compacte [3 t11], les fonctions multiplement surharmoniques); Constantinescu-Cornea [81] et D. Sibony [200] (correspondance de deux espaces « harmoniques » c'est-à-dire pourvus d'axiomatiques), Mokobodski [1, 3 t11] (topologie sur S^+ et points de proportionalité), de la Pradelle [148] (quasi-analyticité), J. Taylor [207] (correspondance des faisceaux et de la frontière de Martin), E. Smyrnelis (allure au voisinage d'un point-frontière irrégulier), Lumer-Naïm [166] (espaces $\mathscr{H}^p$ de fonctions harmoniques et extension des fonctions fortement sous harmoniques de Gårding-Hörmander), notion de flux (Nakai, voir [197]), Anandam [8] (espaces harmoniques sans potentiel

positif) etc. Soulignons le rôle de la nucléarité (Loeb-B. Walsh [160], Hinrichsen [132]), de la cohomologie, dualité, flux, perturbation de structures, même dans des axiomatiques plus faibles (B. Walsh [213-214]).

Voir un aperçu général de cette axiomatique avec beaucoup de compléments dans [54] pourvu de bibliographie.

15. Mais la théorie ne s'applique pas, contrairement à celle de Doob, à l'équation de la chaleur. *Alors H. Bauer* [14, 15, 16] *élargit la théorie précédente* pour traiter en même temps une large classe d'équations paraboliques. Pour définir un « espace harmonique » (espace topologique pourvu d'un faisceau) il remplace essentiellement l'axiome 3 par *l'axiome de convergence K_D plus faible de Doob* (ou même un autre, K_1, encore plus faible où les fonctions sont uniformément majorées) et par un axiome de séparation qui assure un principe de minimum. Avec une base dénombrable et l'existence pour chaque x d'un potentiel > 0 en x (les fonctions hyperharmoniques et les potentiels se définissent comme plus haut), ce qui donne un espace « fortement harmonique », il peut alors étendre en gros toute la partie de la théorie précédente indépendante de P et D (D n'est d'ailleurs pas vérifié pour l'équation de la chaleur), en laissant à Mokobodski l'adaptation de la représentation intégrale (moins facile et moins utile puisqu'il n'y a pas nécessairement de base de S^+) et sans s'occuper de théorie adjointe. Une comparaison approfondie avec l'axiomatique précédente est faite dans [3, t6 n° 1b; 54, 17] et surtout [3 t 11 n° 6]. Les élèves de Bauer complétèrent et élargirent diversement sa théorie et ses applications (Hansen (noyaux harmoniques), Sieveking (recherche de représentation intégrale « concrète »), Bliedtner (groupes harmoniques), Köhn (donnée-frontière sur une partie fermée de la frontière pour les domaines de base) (voir *Lecture Notes* 69), Guber (Congrès de Loutraki, *Lecture Notes* 31; recherche d'équations paraboliques entrant dans le cadre de Bauer), K. Jansen (thèse Erlangen 1969 étendant la théorie des $\mathscr{H}^p$-fonctions de Lumer-Naïm)). Voir aussi les nombreux articles de Boboc, Constantinescu-Cornea et l'ouvrage à l'impression de Constantinescu-Cornea [82] complétant les axiomatiques précédentes ou développant une axiomatique plus faible.

Il est avantageux de suivre la théorie de Bauer sous sa forme d'allure définitive [17] en la complétant, lorsque c'est nécessaire, par des restrictions qui l'identifient à la théorie précédente et permettent un développement plus poussé.

Les questions de topologies et frontières étendues et étudiées dans ces axiomatiques ont été systématiquement examinées et approfondies de *façon*

abstraite préliminaire dans un ouvrage global, qui par souci de brièveté, illustre et détaille les applications surtout dans le cas classique (Brelot [56]).

16. *La question se posait de chercher les ou des faisceaux satisfaisant aux axiomes.* C'est ce qu'a entrepris Bony dans $\mathbf{R}^n$ [27, 28]. Considérons dans $\mathbf{R}^n$ l'axiomatique détaillée plus haut, affaiblie par suppression de l'axiome 3 (mais faisant par commodité les constantes harmoniques). Il existe un opérateur elliptique L (à forme quadratique positive et coefficients non tous nuls à la fois) tel que, pour toute u harmonique de type C^2 dans un ouvert, $Lu = 0$; L est même unique à un facteur près et ses coefficients sont réguliers dans un sous ouvert dense. S'il y a (au sens d'une certaine approximation) suffisamment de fonctions harmoniques de type C^2, il y a dans un ouvert dense convenable, équivalence pour les C^2-fonctions, des conditions d'harmonicité et de surharmonicité avec les conditions $Lu = 0$, $Lu \leqq 0$ pour l'opérateur associé. Indiquons encore entre autres que les axiomes de convergence (axiome 3, forme de Doob K_D ou même forme faible K_1) peuvent être caractérisés par le type de L et que le cas des faisceaux invariants par translation peut être complètement élucidé.

17. Parallèlement aux axiomatiques locales précédentes, les travaux sur l'énergie de Cartan-Deny ont conduit Beurling et Deny à dégager de la théorie des fonctions à intégrale de Dirichlet finie, des propriétés servant d'axiomes pour construire *une axiomatique globale de l'énergie sous le nom de théorie des espaces de Dirichlet*, d'abord dans le cas élémentaire d'un espace à un nombre fini de points, puis sous son aspect général [22, 90]. L'idée nouvelle a été la remarque de Beurling qu'une transformation T du plan complexe qui est une contraction conservant l'origine donne par composition avec une fonction u une fonction Tu d'intégrale de Dirichlet minorée.

Appelons d'abord avec Deny, espace de Dirichlet fonctionnel H, de base une mesure $\xi \geqslant 0$ dans un espace localement compact dénombrable à l'infini, un espace vectoriel complexe de fonctions sommables $- \xi$ localement, muni d'une norme le rendant complet, et tel que l'intégrale $- d\xi$ sur tout compact tende vers 0 avec la norme (propriété de continuité).

Tel est dans un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, pourvu de la mesure de Lebesgue, l'espace obtenu par complétion à partir des fonctions de type C^2 ou même C^∞, à intégrale de Dirichlet finie, avec le produit scalaire

$$(u, v) = \int (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \bar{v})\, dx$$

et la norme-énergie $\sqrt{\int |\operatorname{grad} u|^2 \, dx}$. Dans ce cas particulier, on remarque, grâce à la formule élémentaire de Green, que si v est le potentiel de Green de la mesure de densité $\rho = \Delta v$ supposée à support compact (u, v) vaut $\int u \bar{\rho} \, dx$ à un facteur près.

Dans le cas général on appellera *potentiel* engendré par une fonction f bornée à support compact, le point P_f de l'espace hilbertien H défini par la condition $(u, P_f) = \int u \bar{f} \, d\xi$, $\forall u \in H$. *Un potentiel pur* est défini comme élément adhérent à l'ensemble des potentiels précédents engendrés par les $f \geqslant 0$.

Un espace de Dirichlet, qui contient et généralise le cas particulier cité à base d'intégrale de Dirichlet est un espace de Hilbert fonctionnel pour lequel toute contraction T (dite normale) indiquée plus haut minore la norme. Le développement de la théorie est fécond surtout pour les espaces dits réguliers où les fonctions de H situées dans l'espace C_k des fonctions finies continues à support compact sont denses dans H et même dans C_k. Critères divers, capacité, théorèmes d'équilibre et de balayage analogues aux théories précédentes et bien d'autres notions se rattachant à d'autres domaines en font une théorie très riche. Soulignons seulement que pour un H à potentiels purs réels, H est un espace de Dirichlet si et seulement si est vérifié le principe important suivant dit « principe complet du maximum » approfondi dans Deny [1]: l'inégalité $P_f \leqq P_g + 1$ $(f, g \in C_k)$ doit être vraie p.p. $- d\xi$, dans Ω si elle l'est de même sur $\{ x \mid f > 0 \}$. On peut d'ailleurs développer la théorie abstraite sans mettre à la base une mesure ξ (Thomas [3, t9]). Enfin à côté du cas d'invariance par translation, signalons l'étude analogue par Berg [3, t13] sur la sphère avec invariance par rotation.

18. Arrivons à la *théorie globale des noyaux de G. Hunt* (1957-58) [134] qui domine la théorie moderne du potentiel en ce sens qu'elle contient au fond les axiomatiques précédentes au moins dans les cas les plus intéressants, les relient aux processus de Markov et inspire les recherches récentes. Vu la quantité et la complexité des travaux sur le sujet nous nous contenterons d'une introduction et de quelques résultats essentiels en renvoyant à un aperçu de Deny [3, t5] et aux ouvrages détaillés de P. A. Meyer [169] et Blumenthal-Getoor [23] plus complets et plus faciles que les travaux originaux de Hunt.

Soit un espace localement compact E à base dénombrable; on considère un noyau-mesure $\mu_x \geqslant 0$ dépendant de $x \in E$ qu'on écrit aussi $V(x, e)$ (e ensemble borélien), fonction borélienne de x pour e relativement compact.

Alors *à une fonction f* borélienne $\geqslant 0$ correspond la fonction potentiel de f, qu'on peut écrire:

$Vf(x) = \int f d\mu_x$ ou $\int f(y)\, V(x, dy)$ (d'ailleurs la donnée $f \to V$ équivaut à celle de μ_x).

A une mesure $\theta \geqslant 0$ correspond la mesure, dite potentiel de θ:

$$\theta V(e) = \int V(x, e)\, d\theta(x).$$

Le noyau identité $V(x, e)$ vaut 0 ou 1 selon que $x \notin e$ ou $x \in e$, et conserve $f(x)$ et $\theta(e)$. Extension facile pour des signes quelconques.

Comme exemple élémentaire, prenons dans $\mathbf{R}^3$ le noyau $\int_e \frac{1}{|x-y|} dy$ (mesure de Lebesgue dy). On voit que V_f est le potentiel newtonien de la mesure de densité f, et θV est la mesure de densité égale au potentiel newtonien de θ. On notera $V.\ W$ le noyau produit $\int V(x, dy)\, W(y, e)$; $V_t\ (t \geqslant 0)$ est un semi-groupe si $V_{t+s} = V_t V_s$. On note C_k, C_0 les ensembles de fonctions finies continues à support compact ou tendant vers 0 à l'infini. On dit que V satisfait au principe complet du maximum si quelles que soient $f, g \geqslant 0$ de C_k et $a > 0$, l'inégalité $V_f \leqq V_g + a$ là où $f > 0$ entraîne l'inégalité partout.

Théorème de Hunt: Si V donne de C_k une image dense dans C_0 et satisfait au principe complet du maximum, il existe un semi-groupe unique $P_t\ (t \geqslant 0)$ tel que $V_f = \int_0^\infty P_t f\, dt\ (f \geqslant 0)$ où P_t (dit Fellerien) applique C_k dans C_0, vaut pour P_0 le noyau unité et satisfait à $P_t f \underset{t \to 0}{\to} f\ (f \in C_0)$ uniformément localement, et à $P_t(1) \leqq 1$.

La démonstration utilise une famille de noyaux dits « résolvantes » et un célèbre théorème de Hille-Yosida. Des variantes améliorées ont été données plus tard (Ray, Lion [162], Hirsch [133], Berg, etc.). Relativement à $\{P_t\}$, f borélienne $\geqslant 0$ est dite « excessive » si $P_t f \leqq f$ et $P_t f \underset{t \to 0}{\to} f$, et invariante en cas d'égalité; une définition correspondante de potentiel est évidente, conservant la décomposition de Riesz mais il y a bien d'autres notions de potentiel dans ces questions.

19. *Les relations avec les axiomatiques précédentes* sont faciles à exprimer. Avec la première axiomatique locale (base dénombrable, axiomes 1, 2, 3, existence d'un potentiel > 0 et constantes harmoniques), P. A. Meyer [168] a montré, en utilisant un noyau de Mme Hervé, qu'on peut le choisir de façon à ce qu'il satisfasse aux conditions de Hunt et les fonctions excessives du

semi-groupe correspondant sont alors exactement les fonctions hyperharmoniques $\geqslant 0$ de l'axiomatique.

Dans la théorie de Bauer pour un espace fortement harmonique et les constantes surharmoniques, ce qui est plus général, on arrive à la même identité (voir [18]) à l'aide d'une variante élargie (Hansen) du théorème de Hunt [123]. Toute axiomatique analogue et plus faible ultérieure pose le même problème d'interprétation.

Enfin si l'on examine les espaces de Dirichlet réels, on voit que le noyau qui fournit la définition du potentiel, lorsqu'il s'annule à l'infini, est un noyau de Hunt et qu'alors les potentiels sont des fonctions excessives. C'est ce qui arrive dans le cas de l'espace de Dirichlet classique, dans un domaine régulier de $\mathbf{R}^n$ (c'est-à-dire sans points-frontière irréguliers). Voir aussi J. Elliott [3, t6].

20. *Aspects probabilistes.* On savait depuis longtemps, au moins dans $\mathbf{R}^2$, vingt ans avant l'ouvrage de P. Lévy [159], que, pour le mouvement brownien, la probabilité que la trajectoire issue d'un point x_0 rencontre la frontière d'un domaine $\omega \ni x_0$ pour la première fois sur une partie $e \subset \partial\omega$ (p. ex. borélienne) est la mesure harmonique de e relative à x_0; P. Lévy avait même interprété aussi le potentiel capacitaire, Kakutani savait caractériser les ensembles polaires comme ceux que les trajectoires précédentes ne rencontrent presque sûrement pas et Doob interpréta l'effilement. Etudiant la notion de quasi ou semi-martingale, appelée maintenant sous-martingale, en analogie frappante avec les fonctions sousharmoniques, Doob montre même [94] que si u est sousharmonique de croissance pas trop rapide à l'infini et $X(t)$ une trajectoire brownienne dans $\mathbf{R}^n$, $u(X(t))$ définit une sousmartingale.

Nous allons préciser des notions plus générales dans le cadre des processus de Markov, qui serviront à interpréter la théorie des noyaux de Hunt. On considère un espace abstrait Ω_0 pourvu d'une tribu d'ensembles $\mathscr{A}$ et d'une probabilité-mesure P (mesure sur $\mathscr{A}$ de total 1), et une application de Ω_0 dans un espace E (dit espace des états) pourvu d'une tribu $\mathscr{B}$, par une fonction $X(x)$, $\mathscr{A}$-mesurable (c'est-à-dire que si $e \in \mathscr{B}$, $X^{-1}(e) \in \mathscr{A}$) dite *variable aléatoire.* Si X est réelle finie ou non (c'est-à-dire $E = \mathbf{R}^1$ augmenté de $\pm\infty$ et $\mathscr{B}$ tribu borélienne), on introduit $\mathscr{E}(X) = \int X\,dP$, dite espérance mathématique; l'espérance conditionnelle relative à une sous-tribu $\mathscr{A}'$ est toute fonction $\mathscr{A}'$-mesurable $y(x)$ telle que $\int_\alpha y\,dP = \int_\alpha X dP$ $(\forall \alpha \in \mathscr{A}')$. y est unique, en ce sens que si y_1, y_2 répondent à la question, $y_1 = y_2$ presque partout. On note $y = \mathscr{E}(X|\mathscr{A}')$. Quand X est l'indicateur

d'un ensemble α_0, y est dite probabilité conditionnelle $P(\alpha_0 | \mathscr{A}')$ (*fonction* de x).

Une famille $\{X_t\}$ (t réel dit temps) définit un processus stochastique dont $X_t(x)$ décrit la « trajectoire » de x dans E. Un cas très particulier est le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^n$. Un cas plus général est le « processus de Markov » de type suivant: X_t ($t \geqslant 0$), probabilité-mesure P^y sur $\mathscr{A}$ dépendant d'un point $y \in E$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $P^y(\{X_0 = y\}) = 1$, $P^y(\alpha)$ est $\mathscr{B}$-mesurable;

b) Si $\mathscr{A}_s$ est la sous-tribu engendrée par les ensembles $X_r^{-1}(e)$ ($r \leqslant s$; $e \in \mathscr{B}$) on impose: $P^y(\{X_t \in \beta\} | \mathscr{A}_s) = P^{X_s(x)}(\{X_t \in \beta\})$, $\forall \beta \in \mathscr{B}$, $\forall s, t$; $s \leqslant t$, P^y presque partout dans Ω_0. Ceci signifie grossièrement que la trajectoire issue de y ne dépend pas, après l'époque s, des positions antérieures.

Alors, moyennant une légère adaptation, *tout semi-groupe P_t de la théorie de Hunt s'interprète, au moyen d'un processus de Markov du type précédent, selon* $P_t(y, e) = P^y(\{X_t \in e\})$.

Quant aux martingales, considérons un processus X_t « adapté » à la famille croissante $\mathscr{T}_t$ de sous-tribus de $\mathscr{T}$, tribu sur Ω_0, c'est-à-dire tel que X_t soit $\mathscr{T}_t$-mesurable ($\forall t \geqslant 0$). C'est une martingale (resp. sur ou sous-martingale) si $X_t(x)$ est P-intégrable $\forall t$ et si $\forall s, t$, $s \leqslant t$, $\mathscr{E}(X_t | \mathscr{T}_s) = X_s$ (resp. $\leqslant$ ou $\geqslant$). Voir tous les traités modernes de probabilités, et une étude directe avec applications dans Hunt [136].

Ces notions et bien d'autres comme les temps d'arrêt, temps d'entrée, diverses réduites ou balayages ont beaucoup de relations et propriétés, permettent d'interpréter les notions essentielles de théorie classique ou axiomatique du potentiel et donnent lieu à des études approfondies de cas particuliers (comme le mouvement brownien dont les trajectoires sont continues). Pour tous ces travaux considérables, qui comportent même une théorie du potentiel probabiliste et indépendante, voir, outre les traités de Meyer [169, 170], Blumenthal-Getoor [23] et Dynkin [105], une quantité d'articles comme ceux des auteurs précédents ou de G. Hunt, K. Ito-S. Watanabe, Kunita-Watanabe, Bony, Courrège, Priouret, Kemeny, Snell, J. B. Walsh, Kac suivi de Strook, Sieveking, Cairoli, Port-Stone, J. Taylor, etc. (voir [3 t8, 138, 204, 5, 3 t14]...).

21. *Nouvelles discussions et extensions ; problèmes inverses.* Le succès des axiomatiques précédentes tient à des propriétés de base que l'on a progressivement dégagées pour en discuter le rôle puis s'en servir pour élargir les théories. Les relations avec la synthèse de Hunt ont enrichi ce

genre de travaux (Boboc, Constantinescu, Cornea (réf. dans [78]), comme [25]), Hansen [123], Bliedtner [6], ...). Cela devait s'accentuer, comme on va le voir, dans des recherches parallèles ou ultérieures à un niveau abstrait encore plus élevé, surtout sur les liaisons ou analogies entre les axiomatiques et la théorie du type Hunt et toutes les notions associées comme le balayage, les réduites, les résolvantes, etc.

Ainsi Mokobodski et D. Sibony ont approfondi le rôle du principe du minimum. En partant sur un espace localement compact d'un cône de fonctions *s.c.i.* qui y satisfont, ils bâtissent une théorie locale du type Brelot-Bauer, grâce à quelques autres propriétés, de façon à ce que les fonctions surharmoniques bornées correspondantes soient les fonctions du cône, mais il leur faut prendre un cône *maximal* dans la famille des cônes de type ordonné par inclusion [177].

Ils ont aussi remarqué le rôle des *espaces* et cônes *adaptés*, introduits par Choquet [4, t1]: c'est, sur un espace localement compact, un espace vectoriel réel V de fonctions finies continues v engendré par les fonctions $v \geqslant 0$, contenant pour tout x une v non nulle en x, enfin possédant la propriété de domination suivante: pour tout $v \geqslant 0$, il existe une $w \in V^+$ qui la domine à l'infini, c'est-à-dire telle que $\frac{w}{v} \to \infty$ selon le filtre des complémentaires des compacts ($\frac{w}{v}$ étant pris $+\infty$ quand indéterminé). Un cône convexe C est adapté si $C - C$ est un espace adapté. L'intérêt est qu'alors une forme linéaire sur V, positive sur V^+, se représente par $\int V\, d\mu$, à l'aide d'une mesure μ, souvent unique dans les applications. Cela permet d'étendre la théorie globale de Hunt en remplaçant l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini par un espace adapté.

Ils ont pu ainsi, encore plus nettement, traiter des *problèmes plutôt inverses* des théories initiales: à partir d'un cône convexe de fonctions par exemple continues, chercher des conditions générales à peu près nécessaires et suffisantes pour bâtir une axiomatique (qui conserve les caractéristiques intéressantes des précédentes) ou un semi-groupe de type Hunt, dont les fonctions continues respectivement surharmoniques ou excessives soient à peu près les précédentes. Voir d'abord [3 t11], puis des variantes, et des constructions plus ou moins générales ou abstraites avec des notions nouvelles sur la dualité de deux cônes, la dérivation des potentiels et le balayage, dans bien des articles récents ou en cours, surtout de Mokobodski (voir [172 à 177] et [3, 4]).

D'autre part, sans probabilités et dans un cadre local, une nouvelle généralisation des axiomatiques est entreprise, à base du principe du minimum et de maximalité, qui englobe aussi la théorie des fonctions plurisousharmoniques [113]. On a examiné aussi une axiomatique où les fonctions harmoniques prennent leurs valeurs dans un espace topologique ordonné général (Monna) et on a élargi les axiomatiques en remplaçant la topologie par une semi-topologie, ce dont on se sert pour les approximations d'espaces harmoniques (Bertin [19]). Enfin signalons que l'on s'occupe de plus en plus de problèmes non linéaires.

Quelques années apporteront sans doute, comme Mokobodski s'y emploie, des exposés synthétiques caractérisant un nouveau stade cohérent de la théorie du potentiel et qui sera plus facile à analyser.

BIBLIOGRAPHIE
(très réduite)

Colloques et Séminaires

[1] *Colloque sur la théorie du potentiel (Paris-Orsay 1964)*, publié par le C.N.R.S. n° 146 et les Annales de l'Institut Fourier t. 15/1 (1965).

[2] *Colloque du CIME, Potential theory* (Cours d'été 1969, Stresa).

[3] *Séminaire de théorie du potentiel (Paris)* t. 1 (1957) à t. 13 (1969-70). Secrétariat mathématique de l'Institut H. Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris 5e.

[4] *Séminaire d'initiation à l'Analyse* (Choquet) t. 1 (1962) à t. 9 (1969-70). Institut H. Poincaré, Paris.

[5] *Séminaire de probabilités (Strasbourg)* t. 1 (1966-67) à t. 5 (1969-70). *Lecture Notes 39*, 51, 88, 124, 191.

[6] *Seminar über Potentialtheorie (Erlangen)* depuis 1968, *Lecture Notes 69*.

Indiquons que beaucoup d'articles sur le potentiel et questions connexes se trouvent dans les Annales de l'Institut Fourier (abrégé *Annales I. F.*).

Auteurs (dans d'autres Revues et pour quelques articles des précédentes)

[7] Ahlfors, L. and M. Heins. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle (*Annals of Math. 50*, n° 2, 1949, p. 341).

[8] Anandam, V. Espaces harmoniques sans potentiel positif (*partie de thèse, Paris, 1971, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier*).

[9] Anger, G. Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I (*Berlin 1966, Institut für Mathematik der deutschen Akad. der Wiss.*).

[10] Aronszajn, N., et divers collaborateurs. Theory of Bessel potentials (*Annales I. F. 11*, 1961; *17*/2, 1967; *19*/2, 1970).

[11] Arsove, M. Functions representable as differences of subharmonic functions (*Trans. of the Am. Math. Soc. 75*, n° 2, 1953, p. 327).

[12] Avanissian, V. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques (*Annales E.N.S. 3e série, 78*, 1960, p. 101).

[13] BAUER, H. Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem (*Annales I. F. 11*, 1961, p. 89, avec importante bibliographie).
[14] —— Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen (*Math. Ann. 146*, 1962, p. 1).
[15] —— Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potenzialen) (*Z. Warscheinlichkeitstheorie 1*, 1963, p. 197).
[16] —— Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel (*Colloque* [1]).
[17] —— Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie (*Lecture Notes 22*, 1966).
[18] —— Harmonic spaces and associated Markov processes (*Colloque* [2]).
[19] BERTIN, E. L'approximation des espaces harmoniques (*Thèse Utrecht* 1969).
[20] BEURLING, A. Etudes sur un problème de majoration (*Thèse Upsala* Almquist et Wiksell, 1933).
[21] —— Ensembles exceptionnels (*Acta Math. 72*, 1940, p. 1).
[22] —— and J. DENY. Dirichlet spaces (*Proc. Nat. Ac. Sc. 45*, 1959, p. 208).
[23] BLUMENTHAL, R. and R. GETOOR. Markov processes and potential theory (Ac. press. New York-London, 1968).
[24] BOBOC, N., C. CONSTANTINESCU and A. CORNEA. Axiomatic theory of harmonic functions (*Annales I. F. 15*, 1965, fasc. 1, p. 283, et fasc. 2, p. 37).
[25] —— C. CONSTANTINESCU and A. CORNEA. Semi groups of transitions on harmonic spaces (*Revue roumaine de Math. pures et appliquées 12, n° 6*, 1967, p. 763).
[26] —— et P. MUSTATA. Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique (*Lecture Notes 68*, 1968).
[27] BONY, J. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés (*Ann. I. F. 19*/1, 1969, p. 277; suite d'un article de *17*/1, 1967, p. 353).
[28] —— Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel (voir *Colloque* [2]).
[29] BOULIGAND, G. Fonctions harmoniques, principes de Picard et de Dirichlet (*Mem. des Sc. Math. XI*, 1926, Gauthier-Villars, avec bibliographie importante).
[30] —— Sur le problème de Dirichlet (*Annales de la Soc. pol. de math.*, 1925, p. 59).
[31] BRELOT, M. Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus (*Sitzungsberichten der Berl. Math. Ges. 31*, 1932, p. 46 (historique)).
[32] —— Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point (*Act. sc. et ind. 139*, Hermann 1934).
[33] —— Fonctions sousharmoniques et balayage (*Bull. Ac. royale de Belgique 24*, 1938, p. 301 et p. 421).
[34] —— Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques (*C. R. Ac. Sc. 207*, 1938, p. 836).
[35] —— Familles de Perron et problème de Dirichlet (*Acta Szeged IX*, 1939, p. 133).
[36] —— Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel (*J. de Math.*, *19*, p. 319, 1940).
[37] —— Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques (*Bull. Sc. math. 65*, 1941, p. 72).
[38] —— Sur les ensembles effilés (*Bull. Sc. Math. 68*, 1944, p. 12).
[39] —— Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Annales E.N.S. 61*, 1944, p. 301).
[40] —— Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités (*J. de Math. 24*, 1945, p. 1).
[41] —— Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes (*Bull. Soc. Math. 73*, 1945, p. 55).

[42] —— Le problème de Dirichlet ramifié (*Ann. Univ. Grenoble 22*, 1946, p. 167).
[43] —— Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier (*Ann. Univ. Grenoble 22*, 1946, p. 205).
[44] —— Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin (*Ann. Univ. Grenoble 23*, 1947-48, p. 113).
[45] —— La théorie moderne du potentiel (*Ann. I. F. 4*, 1952, p. 113 (paru en 1954, importante bibliographie).
[46] —— Etude et extensions du principe de Dirichlet (*Ann. I. F. 5*, 1953-54, p. 371).
[47] —— Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin (*J. de Math. 35*, fasc. 4, 1956, p. 297).
[48] —— Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact (*Sem. du pot.* [3], t. 2, 1958, suivi d'autres articles t. 6).
[49] —— Lectures on potential theory (*Tata Institute, n° 19*, 1960, 2e édition 1967, avec large bibliographie).
[50] —— Eléments de la théorie classique de potentiel (Centre de Documentation Univ.; 1re édit. 1959, 4e édit. 1969 avec large bibliographie, Paris; 2e édit. traduite en russe), Ed. Mir, (Moscou 1964)
[51] —— Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement (*Anaïs da Acad. brasil. de ciencias 37*, n° 1, 1965).
[52] —— Capacity and balayage for decreasing sets (*Proc. 5th Berkeley Sympos. on probab.* 1965, Univ. of Calif. Press).
[53] —— Théorie du potentiel et fonctions analytiques (*Colloque sur les fonctions analytiques ;* Erevan, 1965).
[54] —— Axiomatique des fonctions harmoniques (*Cours d'été 65*, Montréal, Les Presses de l'Université).
[55] —— La topologie fine en théorie du potentiel (avec riche bibliographie) (*Symposium on probability methods in Analysis*, Loutraki, 1966, *Lecture Notes 31*, 1967).
[56] —— On topologies and boundaries in potential theory (*Cours du Tata Institute en 1966*, édition élargie 1971, avec importante bibliographie, *Lecture Notes 175*).
[57] —— et Choquet. Espaces et lignes de Green (*Annales I. F. 3*, 1951, p. 199).
[58] —— et Choquet. Polynomes harmoniques et polyharmoniques (*Second colloque sur les équations aux dérivées partielles*, Bruxelles, 1954).
[59] —— et J. L. Doob. Limites angulaires et limites fines (*Annales I. F. 13*/2, 1963).
[60] Burkhardt, H. und F. Meyer. Potentialtheorie (*Encyklopädie der Math. Wiss.*, Vol. 2 à 7 *b*, pp. 464-503, Leipzig).
[61] Calderon, A. P. On the behaviour of harmonic functions near the boundary (*Trans. Am. Math. Soc. 68*, 1950, p. 47).
[62] Carleson, L. Selected problems on exceptional sets (avec 1049 références) (Van Nostrand 1967, *Math. Studies*, 13).
[63] Cartan, H. Sur les fondements de la théorie du potentiel (*Bull. Soc. Math. de France 69*, 1941, p. 71).
[64] —— Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels (*Bull. Soc. Math. 73*, 1945, p. 74).
[65] —— Théorie générale du balayage en potentiel newtonien (*Annales Univ. Grenoble, Math. Phys. 22*, 1946, p. 221).
[66] —— et J. Deny. Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonctions surharmoniques (*Acta Szeged XII*, 1950).
[67] Choquet, G. Nombreux articles dans [3] [4]. — Citons en outre: Theory of capacities (*Annales de l'I. F. 5*, 1953-54, p. 131).
[68] —— Existence et unicité des représentations intégrales (*Sémin. Bourbaki*, déc. 1956).
[69] —— Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, suite de potentiels (*C. R. Ac. Sc. 244*, 1957, p. 1707).

[70] —— Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité (*Ann. I. F. 9*, 1959, p. 91).

[71] —— Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse (*Proceed. du Congrès intern. d'Oslo*, 1962).

[72] —— Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor (*Ann. I. F. 15*/2, 1965, p. 409).

[73] —— et J. DENY. Sur une propriété de moyenne caractéristique des fonctions harmoniques et polyharmoniques (*Bull. Soc. Math. 52*, 1944, p. 118).

[74] —— et J. DENY. Modèles finis en théorie du potentiel (*Journal d'An. Math. V*, 1956-57, p. 77).

[75] CIESIELSKI, Z. Brownian notion, Capacitory potentials and semi-classical sets I, II, III (*Bull. Ac. polonaise des Sc.*, vol. XII, n° 5, 1964; vol. XIII, n° 2 et 3, 1965).

[76] CONSTANTINESCU, C. Die heutige Lage der theorie der harmonischen Raüme (*Revue roumaine de Math. pures et appliquées XI*, n° 9, 1966, p. 1041).

[77] —— Some properties of the balayage of measures on a harmonic space (*Ann. I. F. 17*/1, 1967, p. 273).

[78] —— Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes (*Colloque de Berlin août 1969*, Elliptische Differentialgleichungen Bd 1, S. 19, Akademie Verlag, Berlin).

[79] —— und A. CORNEA. Ideale Ränder Riemanncher Flächen (Springer 1963).

[80] —— and A. CORNEA. On the axiomatic of harmonic functions I et II (*Ann. I. F. 13*/2, 1963).

[81] —— and A. CORNEA. Compactifications of harmonic spaces (*Nagoya Math. J. 25*, 1965, p. 1).

[82] —— and A. CORNEA. Potential theory on harmonic spaces (Springer, à l'impression).

[83] COURANT, R. Dirichlet's principle (Intersc. publishers New York, London 1950) (importante bibliographie).

[84] —— und D. HILBERT. Methoden der mathematischen Physik (2 vol. Berlin 1931-37; reproduction par Inters. publ. 1943).

[85] DENY, J. Nombreux articles dans [3]. — Citons aussi: Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine (*Revue scientifique 85e année fasc. 14*, n° 3279, août 1947, p. 866).

[86] —— Systèmes totaux de fonctions harmoniques (*Ann. I. F. 1*, 1949, p. 103).

[87] —— Les potentiels d'énergie finie (*Acta Math. 82*, 1950, p. 107).

[88] —— Le balayage (*Sémin. Math. de Lund, tome jubilaire de M. Riesz*, 1952, p. 47).

[89] —— Familles fondamentales, noyaux associés (*Ann. I. F. 3*, 1951, p. 73).

[90] —— Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel [2].

[91] —— et P. LELONG. Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône (*Bull. Soc. Math. 19*, p. 89).

[92] —— et J. LIONS. Les espaces du type de Beppo-Levi (*Ann. I. F. 5*, 1953, p. 305).

[93] DIRICHLET. Vorlesungen über die im ungekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkende Kräfte (publié par Grube, Leipzig, 1876).

[94] DOOB, J. L. Semi-martingales and subharmonic functions (*Tr. A. M. S. 77*, 1954, p. 86).

[95] —— A probability approach to the heat equation (*Tr. A. M. S. 80*, 1955, p. 216).

[96] —— Probability methods applied to the first boundary value problem (*Proc. Third Berkeley Symp. on prob. 2*, 1954-55, p. 49).

[97] —— Conditional brownian motion and boundary limits of harmonic functions (*Bull. Soc. Math. 85*, 1957, p. 431).

[98] DOOB, J. L. Probability theory and the first boundary value problem (*Ill. J. of Math. 2*, 1958, p. 19).
[99] —— A non probabilistic proof of the relative Fatou-theorem (*Ann. I. F. 9*, 1959, p. 293).
[100] —— Conformally invariant cluster value theory (*Ill. J. of Math. 5*, 1961, p. 521).
[101] —— Boundary properties of functions with finite Dirichlet integral (*Ann. I. F. 12*, 1962, p. 573).
[102] —— Some classical function theory theorems and their modern versions (*Colloque* [1]).
[103] —— Application to Analysis of a topological definition of smallness of a set (*Bull. A. M. S. 72*, 1966, p. 579).
[104] DURIER, R. Sur les noyaux-fonctions en théorie du potentiel (*Thèse Paris-Orsay* 1969–*Rend. del circolo mat. di Palermo*, à l'impression).
[105] DYNKIN, E. B. Markov processes (2 vol.) (trad. anglaise, Springer, 1965).
[106] EFFROS, E. G. and S. L. KAZDAN. Application of Choquet Simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems.
On the Dirichlet problem for the heat equation.
(articles en cours de publication).
[107] EVANS, G. C. Fundamental points of potential theory (*Rice Institute Pamphlet VII*, 1920, p. 252).
[108] —— The logarithmic potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems (*Ann. M. S. publications VI*, 1927).
[109] —— Applications of Poincaré's sweeping out process (*Proceed. Nat. Ac. Sci. 19*, 1933, p. 457).
[110] —— Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions (*Monatsheften für Math. und Phys.* Bd 43, 1936).
[111] FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor (*Acta. Math. 30*, 1906, p. 335).
[112] FEKETE, M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Kœfficienten (*Math. Zeits 17*, 1923, p. 228).
[113] FEYEL, D. et A. DE LA PRADELLE. Principe du minimum et maximalité dans les préfaisceaux-Esquisse d'une théorie locale (*C. R. Ac. Sc. 272*, p. 19).
[114] FREDHOLM, E. Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet (*Öfversigt of Kongl. Vetens Kaps-Akademiens Förhandlingar* Stokholm, 1900, n° 1, p. 39).
[115] FROSTMAN, O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles... (*Medd. Lunds Universitets Math. Semin.* Bd 3, 1935).
[116] FUGLEDE, B. On the theory of potentials in locally compact spaces (*Acta. Math. 103*, 1960, p. 139).
[117] —— Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel ([1], p. 65).
[118] —— The quasi topology associated with a countably subadditive set functions (*Ann. J. F. 21*/1, 1971, p. 123).
[119] —— Connectivity and finely harmonic functions (*Congrès de Nice* 1970).
[120] GAUSS, C. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die in Verkehrten Verhältnisse des quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstossungs-Kräfte (1840, Gauss Werke Bd 5, pp. 197-242, Göttingen 1892).
[121] GOWRISANKARAN, K. Extreme harmonic functions and boundary value problems I (*Ann. I. F. 13*/2, 1963, p. 307); II (*Math. Zeits. 94*, 1966, p. 256).
[122] —— Fatou-Naïm Dobb limit theorems in the axiomatic system of Brelot (*Ann. I. F. 16*/2, 1966, p. 455).
[123] HANSEN, W. Outre un mémoire important de [6] *Lecture Notes 69*, sur les noyaux harmoniques, soulignons: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen (*Inventiones math. 3*, 1967, p. 179, suivi de *5*, 1968, p. 335).

[124] —— Fegen und Dünnheit mit Anwendungen auf die Laplace und Warmeleitungsgleichung (*Ann. I. F. 21*/2, 1971, p. 79).

[125] HARNACK, A. Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials (Leipzig 1887).

[126] HELMS, L. L. Introduction to potential theory (Wiley Inters. pure and applied math. 22, New York 1969).

[127] HERVÉ, Michel. Analytic and plurisubharmonic functions (*Lecture Notes 198*, 1971).

[128] HERVÉ, Mme R. M. Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel (*Ann. I. F. 12*, 1962, p. 415).

[129] —— Un principe du maximum pour les sous solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$ (*Ann. I. F 14*/2, 1964, p. 493).

[130] —— et Michel HERVÉ. Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus (*Ann. I. F. 19*/1, 1969, p. 305).

[131] HILBERT, D. Über das Dirichletsche Prinzip (*Jahresber. deutsch. Math. Vereinigung 8*, 1900, p. 184).

[132] HINRICHSEN, D. Randintegrale und nukleare Funktionenraüme (*Ann. I. F. 17*/1, 1967, p. 225).

[133] HIRSCH, F. Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels (*Thèse Paris-Orsay* 1971).

[134] HUNT, G. Markov processes and potentials I, II, III (*Illinois J. of Math. 1*, 1957, pp. 66 et 316; *2*, 1958, p. 151).

[135] —— La théorie du potentiel et les processus récurrents ([1]).

[136] —— Martingales et processus de Markov (*Monogr. Soc. Math. de France n° 1*, 1966).

[137] HUBER, A. Some results on generalized axially symmetric potentials (*Proceed. of the conference on differential equations*, p. 147, University of Maryland, Bookstore College Park, Md, 1956).

[138] KAC, M. Aspects probabilistes de la théorie du potentiel (*Cours d'été 1968* de l'Université de Montréal, Les Presses de l'Université, Montréal 1970).

[139] KAKUTANI. Two dimensional brownian motion and harmonic functions (*Proc. Imp. Ac. Tokyo 20*, 1944, p. 706; *21*, 1945, p. 227).

[140] KELDYCH, M. Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet (*Usp. Math. Nauk*, 1941, p. 171). Un résumé en français est contenu dans une Note de même titre aux *Doklady 18*, 1938, n° 6).

[141] —— et LAVRENTIEFF. Sur la stabilité des solutions du problème de Dirichlet (*Bull. Ac. U.R.S.S. Math.* 1937, p. 551; résumé en français dans une Note des *CR Ac. Sci. de Paris* « Sur le problème de Dirichlet », juin 1937).

[142] KELLOGG, O. D. Foundations of potential theory (*Grundlehren der Math. Wiss. 31*, Springer 1929).

[143] KEMENY, J. and J. SNELL. Potentials for denumerable Markov chains (*J. Math. Analysis and applic. 3*, 1961, p. 196).

[144] KISHI, M. Maximum principle in potential theory (*Nagoya Math. J. 23*, 1963, p. 165).

[145] KUNUGUI. Etude sur la théorie du potentiel généralisé (*Osaka Math. J. 2*, 1950, p. 63, avec bibliographie japonaise).

[146] LANDKOFF, N. Approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques (*Mat. Svornik 25*, 1949, p. 95).

[147] —— Les principes de la théorie moderne du potentiel (en russe) (Moscou 1966, grande bibliographie).

[148] LA PRADELLE, A. DE. Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques (*Ann. I. F. 17*/1, 1967, p. 183, complété dans *Ann. I. F. 19*/1, p. 275).

[149] LA VALLÉE POUSSIN, Ch. DE. Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet (*Annales Institut Poincaré* 1931, p. 169).

[150] —— Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet (*Act. Sc. et ind. n° 578*, Hermann Paris 1937).

[151] —— Potentiel et problème généralisé de Dirichlet (*Math. Gazette 22*, n° 248, 1938).

[152] —— Le potentiel logarithmique (Librairie univ. Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1949).

[153] LEBESGUE, H. Sur le problème de Dirichlet (*Rendic. del circ. Mat. di Palermo 24*, 1907, p. 371).

[154] —— Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet (*Société math. de France, Compte Rendus*, 1912).

[155] LELONG-FERRAND, Mme J. Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace (*Ann. E.N.S. 66*, 1949, p. 125).

[156] —— Représentation conforme et transformation à intégrale de Dirichlet bornée (*Cahiers sc. 22*, Gauthier-Villars 1955).

[157] LELONG, P. Les fonctions plurisousharmoniques (*Ann. E.N.S. 62*, 1945, p. 301).

[158] —— Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives (*Cours d'été du CIME 1963*, Varenna).

[159] LÉVY, P. Processus stochastiques et mouvement brownien (Gauthier-Villars 1948, 2e édit. 1965).

[160] LICHTENSTEIN, L. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung (*Encyklopädie der Math. Wiss.*, Bd 2, C3, Leipzig).

[161] —— Neuere Entwicklung der Theorie der partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus (*Encyklop. der Math. Wiss. II*, C 12, rédigé en 1924).

[162] LION, G. Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel (*Ann. I. F. 16*/2, 1966, p. 389).

[163] LOEB, P. An axiomatic treatment of pairs of elliptic differential equations (*Ann. I. F. 16*/2, 1966, p. 107).

[164] —— and B. WALSH. The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot (*Ann. I. F. 15*/2, 1965, p. 597).

[165] —— Nuclearity in axiomatic potential theory (*Bull. A. M. S. 72*, 1966, p. 887).

[166] LUMER-NAÏM, L. $\mathscr{H}^p$-spaces of harmonic functions (*Annales I. F. 17*/2, 1967, p. 425).

[167] MARTIN, R. S. Minimal positive harmonic functions (*Trans. A. M. S. 49*, 1941, p. 137).

[168] MEYER, P. A. Outre diverses conférences dans [3] [5] noter surtout: Brelot's axiomatic potential theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory (*Ann. I. F. 13*, 1963, p. 137).

[169] —— Probabilités et potentiels (*Act. Sc. et ind.*, Paris, Hermann, 1966, et en anglais Blaisdell publ. Co., Boston, 1966).

[170] —— Processus de Markov... (*Lecture Notes 26*, 1967 et *77*, 1968).

[171] MIRANDA, C. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (*Ergeb. Heft 2*, Springer 1955 et 2e édition en anglais en 1969). (Bibliographie considérable.)

[172] MOKOBODSKI, G. Parmi les divers articles de [1, 2, 3, 4, 5] citons: Ultra-filtres rapides sur N. Construction d'une densité relative de deux potentiels comparables ([3] t. 12).

[173] —— Eléments extrémaux pour le balayage ([3] t. 13).

[174] —— Cônes de potentiels et noyaux subordonnés ([2]).

[175] —— Structure des cônes de potentiels (*Sém. Bourbaki*, juin 1970).

[176] —— Dualité formelle et représentation intégrale des fonctions excessives (*Congrès de Nice*, 1970).

[177] —— et D. SIBONY. Outre des articles importants dans [3, surtout t. 11] et [4, surtout t. 6/1] citons aussi: Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel (*Ann. I. F. 17*/1, 1967, p. 401).

[178] NAÏM, L. Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel (*Ann. I. F. 7*, 1957, p. 183).

[179] NICOLESCO, M. Les fonctions polyharmoniques (*Act. Sc. n° 331*, Hermann 1936).

[180] NIKODYM, O. Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques (*J. de Math. 12*, 1933, p. 95).

[181] NINOMYA, N. Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique (*J. Institute of polyt. Osaka City Univ. 8*, n° 2, 1957, p. 147).

[182] OHTSUKA, M. On potentials in locally compact spaces (*Journal of Sc. of Hiroshima Un. séries A-1, vol. 25*, n° 2, 1961, p. 135).

[183] —— Dirichlet problem, extremal length and prime ends (Van Nostrand 1970).

[184] PARREAU, M. Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann (*Ann. I. F. 3*, 1951, p. 103). (Bibliographie importante.)

[185] PERKINS, E. The Dirichlet problem for domains with multiple boundary points (*Tr. A. M. S. 38*, 1935, p. 106).

[186] PERRON, O. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$ (*Math. Zeits. 18*, 1923, p. 42).

[187] PHILIPPS, H. B. et N. WIENER. Nets and the Dirichlet problems (*J. Math. and Phys. 2*, 1923, p. 105).

[188] PLESSIS, N. DU. An introduction to potential theory (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970).

[189] POINCARÉ, H. Théorie du potentiel newtonien (Carré et Naud, Paris 1899).

[190] POLYA, G. und G. SZEGÖ. Über die transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und raümlichen Punktmengen (*J. für die reine und angew. Math. 165*, 1931, p. 4).

[191] —— Isoperimetric inequalities in mathematical physics (*Annals of Math. Studies n° 27*, Princeton 1951).

[192] PRIVALOFF, I. Les fonctions sousharmoniques (en russe) (Moscou 1937).

[193] RADÒ, T. Subharmonic functions (*Erg. der Math. 5*, Heft 1, Springer 1937).

[194] RIEMANN, B. Grundlagen für eine allge Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse (*Inaugural Dissertation*, Göttingen 1851; œuvres complètes Leipzig, Teubner; reprinted Dover publ. NY. 1953).

[195] RIESZ, F. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (*Acta. Math. 48*, 1926, p. 329 et *54*, 1930, p. 321).

[196] —— M. Intégrales de Riemann-Liouville et potentiel (*Acta. Szeged 9*, 1938-1940, p. 1).

[197] RODIN, B. and L. SARIO. (Avec appendice de NAKAI.) Principal functions (Van Nostrand 1968) (bibliographie importante).

[198] SCHWARZ. Gesammelte Math. Abhandlungen, Berlin 1890.

[199] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions (nouvelle édition, Hermann, 1966).

[200] SIBONY, D. Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations; théorème de Doob généralisé (*Ann. I. F. 18*/2, 1968, p. 91).

[201] —— Théorème de limites fines et problème de Dirichlet (*Ann. I. F. 18*/2, 1968, p. 121).

[202] STAMPACCHIA, G. Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus (*Cours d'été 1965*, Montréal, les Presses de l'Univ.).

[203] STEIN, E.; STEIN and WEISS. On the theory of harmonic functions of several variables; I et II (*Acta. Math. 103*, 1960, p. 25 et *106*, 1961, p. 137).

[204] STROOK, D. The Kac approach to potential theory I (*Journal of Math. and Mech. 16* n° 8, 1967) et II (*Comm. on pure and applied Math. 20*, 1967).
[205] TAUTZ, G. Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe (*Math. Noch. 2*, 1949, p. 279).
[206] —— Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen I et II (*Archiv. der Math. 3*, 1952, pp. 232 et 239; compléments p. 361).
[207] TAYLOR, J. The Martin boundary of equivalent sheaves (*Ann. I. F. 20*/1, 1970, p. 433).
[208] TEMAM, R. Analyse numérique (Collection Sup, le mathématicien, Les Presses Universitaires, 1970).
[209] TSUJI, M. Potential theory in modern function theory (Maruzen Co. Ltd, Tokyo, 1959).
[210] VASILESCO, F. Le problème généralisé de Dirichlet (*Mémoires de l'Ac. Royale de Belgique*, 1937).
[211] —— La notion de capacité (*Act. Sc. et ind. 571*, Hermam, 1937).
[212] —— La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet (*Act. Sc. et ind. 660*, Hermann, 1938).
[213] WALSH, B. Flux in potential theory, I Cohomology (*Inventions Math. 8*, 1969, p. 175), II Duality (*Ann. I. F. 19*/2, p. 371).
[214] —— Perturbation of harmonic structures and index-zero theorem (*Ann. I. F. 20*/1, 1970, p. 317).
[215] WEINSTEIN, A. Generalized axially symmetric potential theory (*Bull. A. M. S. 59*, 1953, p. 20).
[216] WIENER, N. Certain notions in potential theory (*J. of Math. and Phys. III*, n° 1, 1924).
[217] —— The Dirichlet problem (*J. of Math. and Phys. III*, n° 3, 1924).
[218] —— Note on a paper of O. Perron (*J. of Math. and Phys. IV*, n° 1, 1925).
[219] ZAREMBA, S. Sur un problème toujours possible comprenant à titre de cas particulier le problème de Dirichlet et celui de Neumann (*J. de Math., 9e série 6*, 1927, p. 127).

(Reçu le 15 juillet 1971)

Marcel Brelot
Université Paris VI
Mathématiques (Tour 45-46)
11, quai Saint-Bernard
Paris 5e