

§2. Seconde démonstration du théorème de Chevalley- Warning.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPOSITION 1. — *Si un corps commutatif K possède la propriété (C_1) , alors il possède la propriété (B_0) .*

Démonstration. — Soit en effet L un corps gauche de centre K et de degré fini n sur K . On sait que n est un carré (soit $n = d^2$) et que si e_1, \dots, e_n est une base de L sur K (en tant qu'espace vectoriel), la norme réduite $Nrd_{L/K}(x)$ d'un élément quelconque $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ de L est un polynôme homogène et de degré d , à coefficients dans K , par rapport aux composantes x_1, \dots, x_n de x , qui sont dans K (voir par exemple Bourbaki, Algèbre, chap. VIII, § 12; dans le cas bien connu du corps \mathbf{H} des quaternions ordinaires sur \mathbf{R} , rapporté à la base canonique $1, i, j, k$, on a $n = 4 = 2^2$ et $Nrd_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$); cette norme réduite ne s'annule que pour $x = 0$, donc pour $x_1 = \dots = x_n = 0$; comme K est supposé posséder la propriété (C_1) , on a nécessairement $n = d^2 \leq d$, donc $d = 1$, $n = 1$ et $L = K$, C.Q.F.D.

Redémontrons alors le théorème de Wedderburn; soit L un corps fini, non supposé commutatif, et soit k son centre; k est un corps fini commutatif, et il possède la propriété (C_1) (cor. 2), donc la propriété (B_0) (prop. 1); mais comme L est évidemment de degré fini sur k , on a alors $L = k$ (par définition de (B_0)), et par conséquent L est commutatif, C.Q.F.D.

§ 2. *Seconde démonstration du théorème de Chevalley-Waring.*

2.1. Cette seconde démonstration, indépendante de la théorie des polynômes réduits, repose sur le théorème suivant (dont on aura également besoin au § 3):

THÉORÈME 2. — *Soit $F \in k[X]$ un polynôme à n variables, et de degré d . Alors, si $d < n(q-1)$, on a*

$$(2.1.1) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(\mathbf{x}) = 0.$$

Démonstration. — Par linéarité, on peut se ramener au cas où F est un monôme $X_1^{u_1} \dots X_n^{u_n}$, avec $d = u_1 + \dots + u_n < n(q-1)$; on a alors

$$(2.1.2) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x_i \in k} x_i^{u_i} \right);$$

l'inégalité relative à d montre que pour un i au moins, $u_i < q-1$, et il suffit évidemment de prouver que, dans (2.1.2), le i -ème facteur du membre de droite est alors nul, ce qui résulte du lemme suivant:

LEMME 1. — Soit u un entier ≥ 0 , et posons $S_u = \sum_{x \in k} x^u$; alors

(i) si u est non nul et divisible par $q - 1$, $S_u = -1$;

(ii) sinon, $S_u = 0$.

En particulier, si $u < q - 1$, $S_u = 0$.

Prouvons ce lemme; comme $x^q = x$ pour tout $x \in k$, on ne restreint pas la généralité de la démonstration en supposant $0 \leq u \leq q - 1$; on est ainsi amené à distinguer trois cas:

(1) $u = 0$: S_u est alors somme de q termes égaux à 1; comme q est divisible par la caractéristique p de k , on a bien $S_u = 0$;

(2) $u = q - 1$: alors $x^u = 0$ pour $x = 0$, et $x^u = 1$ sinon; S_u est donc somme de $q - 1$ termes égaux à 1, et on conclut comme en (1);

(3) $0 < u < q - 1$: la proposition 7 (chap. 1) avec $d = u$ montre qu'il existe dans k^* un élément a tel que $a^u \neq 1$; comme $x \mapsto ax$ est une bijection de k sur k , on peut écrire $S_u = \sum_{x \in k} (ax)^u = a^u S_u$; mais ceci donne $(a^u - 1) S_u = 0$, donc, en simplifiant par $a^u - 1 \neq 0$, $S_u = 0$, C.Q.F.D.

On aurait également pu régler les cas (2) et (3) de la façon suivante: soit g un générateur de k^* ; les éléments x de k sont alors 0, et les g^i avec $0 \leq i \leq q - 2$; S_u est donc égal à la somme de la progression géométrique $1 + g^u + g^{2u} + \dots + g^{(q-2)u}$; d'où $S_u = (1 - g^{(q-1)u}) / (1 - g^u)$, ce qui vaut bien 0, puisque $g^{q-1} = 0$. Remarquons par ailleurs que la nullité des $q - 2$ quantités S_u ($0 < u < q - 1$) équivaut, compte tenu des *formules de Newton*, à la nullité des $q - 2$ fonctions symétriques élémentaires des éléments de k^* autres que le produit (voir chap. 1, sect. 1.1).

2.2. Utilisons maintenant le théorème 2 pour redémontrer le théorème de Chevalley-Warning. Considérons le polynôme \bar{F} défini par (1.1.2) (sect. 1.1); il est de degré $d(q-1) < n(q-1)$, puisqu'on a supposé $n > d$; le théorème 2 permet donc d'écrire

$$(2.2.1) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = 0;$$

mais $\bar{F}(\mathbf{x})$ vaut 1 si $\mathbf{x} \in V$, et 0 si $\mathbf{x} \notin V$; d'où une seconde égalité:

$$(2.2.2) \quad \sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = N.1;$$

(2.2.1) et (2.2.2) donnent alors $N.1 = 0$, soit, puisque k est de caractéristique p , $N \equiv 0 \pmod{p}$, C.Q.F.D.