Notes sur le chapitre 3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Notes sur le chapitre 3

§ **1**: le théorème de Chevalley-Warning a une histoire intéressante. En 1933, Tsen avait prouvé que le corps $K = C(T)$ des fractions rationnelles à une variable T sur un corps algébriquement clos C possède la propriété (B_0) (autrement dit, a un groupe de Brauer nul: Tsen (1933)); Artin nota que la démonstration de Tsen consistait: (1) à prouver que K possède la propriété (C_1); puis (2) à déduire directement la propriété (B_0) de la propriété (C_1), sans utiliser la définition particulière de K; comme les corps finis possèdent la propriété (B_0) (théorème de Wedderburn !) et que par ailleurs ils « ne sont pas trop loin » de leur clôture algébrique (chap. 1, § 1), Artin fut amené à conjecturer que les corps finis possèdent la propriété (C_1); ce qui fut aussitôt démontré en caractéristique 2 par Völsch, puis en caractéristique quelconque par Chevalley, sous une forme d'ailleurs plus forte que celle prévue par Artin (Chevalley (1935)); c'est Warning qui, examinant la démonstration de Chevalley, s'aperçut que, pour les corps finis, la « bonne » propriété n'était pas la propriété (C_1), mais la divisibilité de N par p (Warning (1935)): d'où finalement le nom de « théorème de Chevalley-Warning » attribué au théorème 1. Ce théorème a d'ailleurs été amélioré par Ax (1964), qui a prouvé ceci (mêmes notations que dans le th. 1): si b est le plus grand entier strictement inférieur à n/d, N est divisible par q^b (donc par p^{fb}). Ce résultat d'Ax a lui-même été perfectionné récemment par Katz (1971); à ce sujet, voir le chapitre 7.

Indiquons que l'étude de la propriété (C_1) (et plus généralement de la propriété (C_r)) a été reprise systématiquement dans les années cinquante par Lang (1952) et Nagata (1957) et a connu depuis lors des développements importants; à ce sujet, voir [7], ainsi que Terjanian (1972). Signalons par ailleurs qu'il existe des corps possédant la propriété (B_0), « très proches » de leur clôture algébrique (de façon précise, quasi-finis), et ne possédant pourtant pas la propriété (C_1), ni même la propriété (C_r), si grand que soit r: voir Ax (1965, a, b; 1968).

§ **2**: le calcul modulo p de N par la formule (2.2.2) est parfois baptisé « méthode de Kronecker » ou « méthode de Lebesgue » (voir Lebesgue (1837, I), th. 1); pour des généralisations de cette formule, voir Dwork (1960, a; 1966, b); voir également les chapitres 7 et 9.

§ **3** et **4**: comme indiqué dans le texte, les théorèmes 3 et 4 sont dus respectivement à Warning (1935) et Terjanian (1966). Pour des résultats analogues au théorème 5 (mais moins triviaux !), voir Carlitz (1953, b; 1954, b), et Redei (1946).