

§2. Sommes de Gauss.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 2. *Sommes de Gauss.*

2.1. Soient χ un caractère multiplicatif et β un caractère additif de k .

DÉFINITION 1. — On appelle somme de Gauss associée à χ et β la quantité

$$(2.1.1) \quad \tau(\chi|\beta) = \sum_{x \in k^*} \chi(x) \beta(x).$$

Les valeurs prises par β et χ étant des racines p -ièmes de l'unité, et 0 ou des racines $(q-1)$ -ièmes de l'unité, $\tau(\chi|\beta)$ est un entier du corps des racines $p(q-1)$ -ièmes de l'unité.

Si le caractère β est fixé une fois pour toutes (par exemple, si $\beta(x) = \zeta^{\text{Tr}(x)}$, avec $\zeta = e^{2\pi i/p}$: sect. 1.2), on écrit $\tau(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi|\beta)$, et (pour $y \in k$) $\tau_y(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi|\beta_y)$ (sect. 1.2): on a donc

$$(2.1.2) \quad \tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi(x) \beta(xy).$$

2.2. Si l'un des caractères χ et β est trivial, la somme de Gauss associée est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) appliquées à χ ou à β :

- (i) si χ est trivial, mais non β , on a $\tau(\chi|\beta) = -1$;
- (ii) si β est trivial, mais non χ , on a $\tau(\chi|\beta) = 0$;
- (iii) enfin, si χ et β sont tous deux triviaux, on a $\tau(\chi|\beta) = q - 1$.

2.3. Passons au cas non trivial. On suppose $\chi \neq \varepsilon$, on fixe une fois pour toutes un caractère additif non trivial β , et on met tous les caractères additifs non triviaux de k sous la forme β_y ($y \in k^*$) (prop. 1); les sommes de Gauss non triviales associées à χ sont alors les $\tau_y(\chi)$ ($y \in k^*$).

PROPOSITION 6. — Si $\bar{\chi}$ désigne le caractère conjugué de χ (sect. 1.1), on a

$$(2.3.1) \quad \tau_y(\chi) = \bar{\chi}(y) \tau(\chi).$$

Démonstration. — Puisque $y \neq 0$, l'application $x \mapsto xy$ est une permutation de k^* ; il suffit alors d'écrire

$$\tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi^{-1}(y) \chi(xy) \beta(xy) = \bar{\chi}(y) \sum_{x \in k^*} \chi(xy) \beta(xy)$$

et de faire le changement de variable $z = xy$ pour obtenir (2.3.1).

PROPOSITION 7. — *On a (toujours pour $\chi \neq \varepsilon$)*

$$(2.3.2) \quad \tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1).$$

Démonstration. — Par définition, $\tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x) \bar{\chi}(y) \beta(x) \beta(y)$; mais $\chi(x) \bar{\chi}(y) = \chi(x) \chi^{-1}(y) = \chi(xy^{-1})$, et $\beta(x) \beta(y) = \beta(x+y)$. si on fait le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, z)$ défini par $z = xy^{-1}$, on obtient donc

$$(2.3.3) \quad \tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = \sum_{y \in k^*} \sum_{z \in k^*} \chi(z) \beta(y(z+1)).$$

Le second membre se fractionne en deux sommes partielles correspondant respectivement à $z = -1$ et à $z \neq -1$; comme $\beta(0) = 1$, la première somme vaut $(q-1)\chi(-1)$; quant à la seconde, elle peut s'écrire

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) \sum_{y \in k^*} \beta(y(z+1));$$

mais la proposition 2, appliquée à $a = z + 1$, montre que pour tout $z \neq -1$, la somme portant sur $y \in k^*$ vaut $-\beta(0) = -1$; par ailleurs, (1.1.1), appliqué au groupe k^* et au caractère χ , donne

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) = -\chi(-1);$$

la deuxième somme partielle vaut donc $\chi(-1)$; si alors on reporte dans (2.3.3) les valeurs des deux sommes partielles, on obtient

$$\tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = (q-1)\chi(-1) + \chi(-1),$$

c'est-à-dire (2.3.2).

PROPOSITION 8. — *On a (en supposant toujours $\chi \neq \varepsilon$)*

$$(2.3.4) \quad |\tau(\chi)|^2 = q.$$

Démonstration. — Par définition, $|\tau(\chi)|^2 = \tau(\chi) \overline{\tau(\chi)}$; on peut donc écrire $|\tau(\chi)|^2 = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x) \bar{\chi}(y) \beta(x) \beta(y)$; mais $\bar{\chi}(y) = \chi^{-1}(y) = \chi(y^{-1})$, et de même $\bar{\beta}(y) = \beta(-y)$; le terme général de la somme ci-dessus est alors égal à $\chi(xy^{-1}) \beta(x-y)$, ou encore (en remplaçant y par $-y$, ce qui ne change pas la somme) à $\chi(-1) \chi(xy^{-1}) \beta(x+y)$: la proposition 8 résulte donc de la proposition 7, et du fait que $\chi(-1)^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$.