§2. Sommes de Gauss.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

§ 2. *Sommes de Gauss.*

2.1. Soient χ un caractère multiplicatif et β un caractère additif de k.

DÉFINITION 1. — *On appelle* somme de Gauss *associée à* χ *et* β *la quantité*

$$\tau(\chi|\beta) = \sum_{x \in k^*} \chi(x)\beta(x). \tag{2.1.1}$$

Les valeurs prises par β et χ étant des racines p-ièmes de l'unité, et 0 ou des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité, $\tau(\chi \mid \beta)$ est un entier du corps des racines $p(q-1)$-ièmes de l'unité.

Si le caractère β est fixé une fois pour toutes (par exemple, si $\beta(x) = \zeta^{Tr(x)}$, avec $\zeta = e^{2\pi i/p}$: sect. 1.2), on écrit $\tau(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi \mid \beta)$, et (pour $y \in k$) $\tau_y(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi \mid \beta_y)$ (sect. 1.2): on a donc

$$\tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi(x)\beta(xy). \tag{2.1.2}$$

2.2. Si l'un des caractères χ et β est trivial, la somme de Gauss associée est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) appliquées à χ ou à β:

(i) *si* χ *est trivial, mais non* β, *on a* $\tau(\chi \mid \beta) = -1$;

(ii) *si* β *est trivial, mais non* χ, *on a* $\tau(\chi \mid \beta) = 0$;

(iii) *enfin, si* χ *et* β *sont tous deux triviaux, on a* $\tau(\chi \mid \beta) = q - 1$.

2.3. Passons au cas non trivial. On suppose $\chi \neq \varepsilon$, on fixe une fois pour toutes un caractère additif non trivial β, et on met tous les caractères additifs non triviaux de k sous la forme β_y $(y \in k^*)$ (prop. 1); les sommes de Gauss non triviales associées à χ sont alors les $\tau_y(\chi)$ $(y \in k^*)$.

PROPOSITION 6. — *Si* $\bar{\chi}$ *désigne le caractère conjugué de* χ *(sect. 1.1), on a*

$$\tau_y(\chi) = \bar{\chi}(y)\tau(\chi). \tag{2.3.1}$$

Démonstration. — Puisque $y \neq 0$, l'application $x \mapsto xy$ est une permutation de k^*; il suffit alors d'écrire

$$\tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi^{-1}(y)\chi(xy)\beta(xy) = \bar{\chi}(y) \sum_{x \in k^*} \chi(xy)\beta(xy)$$

et de faire le changement de variable $z = xy$ pour obtenir (2.3.1).

Proposition 7. — *On a (toujours pour $\chi \neq \varepsilon$)*

(2.3.2) $$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1).$$

Démonstration. — Par définition, $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x)\bar{\chi}(y)\beta(x)$ $\beta(y)$; mais $\chi(x)\bar{\chi}(y) = \chi(x)\chi^{-1}(y) = \chi(xy^{-1})$, et $\beta(x)\beta(y) = \beta(x+y)$. si on fait le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, z)$ défini par $z = xy^{-1}$, on obtient donc

(2.3.3) $$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{y \in k^*} \sum_{z \in k^*} \chi(z)\beta(y(z+1)).$$

Le second membre se fractionne en deux sommes partielles correspondant respectivement à $z = -1$ et à $z \neq -1$; comme $\beta(0) = 1$, la première somme vaut $(q-1)\chi(-1)$; quant à la seconde, elle peut s'écrire

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) \sum_{y \in k^*} \beta(y(z+1));$$

mais la proposition 2, appliquée à $a = z + 1$, montre que pour tout $z \neq -1$, la somme portant sur $y \in k^*$ vaut $-\beta(0) = -1$; par ailleurs, (1.1.1), appliqué au groupe k^* et au caractère χ, donne

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) = -\chi(-1);$$

la deuxième somme partielle vaut donc $\chi(-1)$; si alors on reporte dans (2.3.3) les valeurs des deux sommes partielles, on obtient

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = (q-1)\chi(-1) + \chi(-1),$$

c'est-à-dire (2.3.2).

Proposition 8. — *On a (en supposant toujours $\chi \neq \varepsilon$)*

(2.3.4) $$|\tau(\chi)|^2 = q.$$

Démonstration. — Par définition, $|\tau(\chi)|^2 = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}$; on peut donc écrire $|\tau(\chi)|^2 = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x)\bar{\chi}(y)\beta(x)\bar{\beta}(y)$; mais $\bar{\chi}(y) = \chi^{-1}(y) = \chi(y^{-1})$, et de même $\bar{\beta}(y) = \beta(-y)$; le terme général de la somme ci-dessus est alors égal à $\chi(xy^{-1})\beta(x-y)$, ou encore (en remplaçant y par $-y$, ce qui ne change pas la somme) à $\chi(-1)\chi(xy^{-1})\beta(x+y)$: la proposition 8 résulte donc de la proposition 7, et du fait que $\chi(-1)^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$.