§3. Sommes de Jacobi à deux caractères.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ **3.** *Sommes de Jacobi à deux caractères.*

3.1. Soient maintenant χ et ψ deux caractères multiplicatifs du corps fini k.

DÉFINITION 2. — *On appelle* somme de Jacobi *associée à χ et ψ la quantité*

(3.1.1) $$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x \in k} \chi(x) \psi(1-x).$$

Comme le second membre de (3.1.1) peut également s'écrire $\sum_{x+y=1} \chi(x) \psi(y)$ on voit que $\pi(\chi, \psi) = \pi(\psi, \chi)$. Il est clair d'autre part que $\pi(\chi, \psi)$ est un entier du corps des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité.

3.2. Si l'un des deux caractères χ et ψ est trivial, la somme de Jacobi est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) et de la convention (1.4.1):

(i) *si* $\chi = \psi = \varepsilon$, *on a* $\pi(\chi, \psi) = q$;

(ii) *si* $\chi = \varepsilon$ *et* $\psi \neq \varepsilon$ *(ou l'inverse), on a* $\pi(\chi, \psi) = 0$.

3.3. Passons au cas non trivial.

PROPOSITION 9. — *Supposons χ et ψ non triviaux. Alors*

(i) *Si* $\chi\psi = \varepsilon$, *on a*

(3.3.1) $$\pi(\chi, \psi) = -\chi(-1).$$

(ii) *Si au contraire* $\chi\psi \neq \varepsilon$, *la somme de Jacobi* $\pi(\chi, \psi)$ *se calcule à l'aide des sommes de Gauss non triviales* $\tau(\chi)$, $\tau(\psi)$ *et* $\tau(\chi\psi)$ *par la formule*

(3.3.2) $$\pi(\chi, \psi) = \tau(\chi)\tau(\psi)/\tau(\chi\psi).$$

(Les trois sommes de Gauss figurant dans le membre de droite sont supposées calculées à l'aide d'un même caractère additif non trivial β de k).

Démonstration. — (i) Si $\chi\psi = \varepsilon$, on a $\psi = \chi^{-1}$, et on peut écrire

$$\pi(\chi, \psi) = \sum_{x \neq 0,\, 1} \chi(x) \chi^{-1}(1-x) = \sum_{x \neq 0,\, 1} \chi(x/(1-x));$$

mais le quotient $y = x/(1-x)$ est une fonction homographique régulière de x, et quand x prend toute valeur possible dans k, sauf 0 et 1, y prend toute valeur possible dans k, sauf 0 et -1; ainsi, $\pi(\chi, \psi) = \sum_{y \in k^*} \chi(y)$

$-\chi(-1)$ et (3.3.1) résulte alors de (1.1.1) appliqué au caractère multiplicatif non trivial χ.

(ii) La définition des sommes de Gauss et la convention (1.4.1) permettent d'écrire

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{x \in k} \sum_{y \in k} \chi(x)\psi(y)\beta(x+y);$$

dans le second membre, faisons le changement de variables $(x, y) \mapsto (z, t)$ défini par $z = x + y$ et $tz = x$ (l'apparition de la valeur 0 n'est pas gênante, du fait que $\chi(0) = \psi(0) = 0$: on laisse au lecteur le soin d'examiner ce point en détail); il vient

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \sum_{z \in k} \sum_{t \in k} \chi(z)\chi(t)\psi(z)\psi(1-t)\beta(z),$$

ou encore

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \Big(\sum_{z \in k} (\chi\psi)(z)\beta(z)\Big)\Big(\sum_{t \in k} \chi(t)\psi(1-t)\Big),$$

c'est-à-dire finalement, puisque $(\chi\psi)(0) = 0$,

$$\tau(\chi)\tau(\psi) = \tau(\chi\psi)\pi(\chi, \psi),$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. — *Si les trois caractères χ, ψ et $\chi\psi$ sont non triviaux, on a*

(3.3.3) $$|\pi(\chi, \psi)|^2 = q.$$

Démonstration. — Utiliser la proposition 9, (ii), puis la proposition 8.

COROLLAIRE 2. — *Supposons toujours le caractère χ non trivial, et notons δ son ordre. On a alors*

(3.3.4) $$\tau(\chi)^\delta = q\chi(-1)\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}).$$

Démonstration. — Pour $1 \leqslant j \leqslant \delta - 2$, la proposition 9, (ii) donne

$$\pi(\chi, \chi^j) = \tau(\chi)\tau(\chi^j)/\tau(\chi^{j+1});$$

en multipliant membre à membre ces $\delta - 2$ égalités, on obtient

$$\pi(\chi, \chi)\pi(\chi, \chi^2)\dots\pi(\chi, \chi^{\delta-2}) = \tau(\chi)^{\delta-1}/\tau(\chi^{\delta-1});$$

mais $\chi^{\delta-1} = \chi^{-1} = \bar{\chi}$; il suffit alors de multiplier les deux membres de cette dernière égalité par $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1)$ pour obtenir (3.3.4).