

§4. Sommes de Jacobi à n caractères.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 4. *Sommes de Jacobi à n caractères.*

4.1. Soient n un entier ≥ 1 , et χ_1, \dots, χ_n n caractères multiplicatifs de k . Désignons par H l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de k^n tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$; c'est un hyperplan affine de k^n , et on a en particulier $\text{card}(H) = q^{n-1}$.

DÉFINITION 3. — *On appelle somme de Jacobi associée à χ_1, \dots, χ_n la quantité*

$$(4.1.1) \quad \pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = \sum_{\mathbf{x} \in H} \chi_1(x_1) \dots \chi_n(x_n).$$

C'est évidemment un entier du corps des racines $(q-1)$ -ièmes de l'unité. Pour $n = 1$, on a $\pi(\chi_1) = 1$; pour $n = 2$, on retrouve les sommes de Jacobi à deux caractères étudiées au paragraphe précédent; dans ce qui suit, on pourra donc supposer $n \geq 3$.

4.2. Si un au moins des caractères χ_i est trivial, on a une somme de Jacobi « triviale » qui se calcule explicitement:

- (i) *si tous les χ_i sont triviaux, on a $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = q^{n-1}$;*
- (ii) *si la famille χ_i comporte au moins un caractère trivial et au moins un caractère non trivial, on a $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0$.*

(Prouvons cette dernière égalité, qui n'est pas absolument évidente: quitte éventuellement à renuméroter les caractères, on peut supposer $\chi_1 \neq \varepsilon, \dots, \chi_m \neq \varepsilon$, mais $\chi_{m+1} = \dots = \chi_n = \varepsilon$, avec $1 \leq m \leq n-1$; comme alors $\chi_{m+1}(y) = \dots = \chi_n(y) = 1$ pour tout élément y de k , et que le système de $m+1$ équations linéaires

$$X_1 + \dots + X_n = 1, \quad X_1 = x_1, \dots, \quad X_m = x_m,$$

admet exactement q^{n-m-1} solutions dans k^n quels que soient les m éléments x_1, \dots, x_m de k , on voit que

$$\pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = q^{n-m-1} \left(\sum_{x_1 \in k} \chi_1(x_1) \right) \dots \left(\sum_{x_m \in k} \chi_m(x_m) \right);$$

mais chacune des sommes du membre de droite est nulle (utiliser (1.1.1) et (1.4.1)); en définitive, on a donc bien $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0$, C.Q.F.D.)

4.3. Passons maintenant au cas non trivial.

PROPOSITION 10. — *Supposons $\chi_i \neq \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors*

(i) *Si $\chi_1 \dots \chi_n = \varepsilon$, on a*

$$(4.3.1) \quad \pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = \chi_n(-1) \pi(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}).$$

(ii) *Si au contraire $\chi_1 \dots \chi_n \neq \varepsilon$, la somme de Jacobi $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ peut s'exprimer à l'aide de sommes de Gauss non triviales par la formule*

$$(4.3.2) \quad \pi(\chi_1, \dots, \chi_n) = \tau(\chi_1) \dots \tau(\chi_n) / \tau(\chi_1 \dots \chi_n).$$

(Les $n + 1$ sommes de Gauss figurant dans le membre de droite sont supposées calculées à l'aide d'un même caractère additif non trivial β de k).

Démonstration. — (i) Ecrivons pour abrégé $\pi = \pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$, et posons

$$(4.3.3) \quad \rho = \sum \chi_1(x_1) \dots \chi_{n-1}(x_{n-1})$$

(somme étendue à l'ensemble des points (x_1, \dots, x_{n-1}) de k^{n-1} tels que $x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$), puis

$$(4.3.4) \quad \sigma = \sum \chi_1(x_1) \dots \chi_n(x_n)$$

(somme étendue à l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) de H tels que $x_n \neq 1$). Il est clair que $\pi = \rho + \sigma$, et il suffit donc, pour prouver l'égalité (4.3.1), d'établir les deux égalités ci-dessous:

$$(4.3.5) \quad \rho = 0; \quad \sigma = -\chi_n(-1) \pi(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}).$$

Démontrons la première. Comme $\chi_{n-1}(0) = 0$, on peut, dans (4.3.3), limiter la sommation aux points tels que $x_{n-1} \neq 0$, puis faire le changement de variables $(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-2}, t)$ défini par

$$t = -x_{n-1}, \quad ty_1 = -x_1, \dots, \quad ty_{n-2} = -x_{n-2}.$$

(4.3.3) se transforme alors en

$$\rho = \chi_{n-1}(-1) \pi(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \sum_{t \in k^*} (\chi_1 \dots \chi_{n-1})(t);$$

mais par hypothèse, $\chi_1 \dots \chi_{n-1} = \chi_n^{-1} \neq \varepsilon$; compte tenu de (1.1.1), la somme figurant dans le membre de droite est alors nulle, et on a bien $\rho = 0$.

Démontrons la seconde égalité (4.3.5). Faisons, dans le membre de droite de (4.3.4), le changement de variables $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, t)$ défini par

$$y_1 = x_1/(1-x_n), \dots, y_{n-1} = x_{n-1}/(1-x_n), t = x_n/(1-x_n).$$

(4.3.4) se transforme en

$$\sigma = \left(\sum_{t \neq 0, -1} \chi_n(t) \right) \left(\sum \chi_1(y_1) \dots \chi_{n-1}(y_{n-1}) \right),$$

la deuxième somme étant étendue aux points (y_1, \dots, y_{n-1}) de k^{n-1} tels que $y_1 + \dots + y_{n-1} = 0$; cette deuxième somme est donc égale par définition à $\pi(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$; comme la première somme figurant dans le membre de droite vaut $-\chi_n(-1)$ (utiliser (1.1.1)), on aboutit bien à la seconde égalité (4.3.5), ce qui achève de démontrer (i).

(ii) Même méthode que pour la proposition 9, (ii) (qui correspond au cas $n = 2$); on laisse au lecteur le soin d'effectuer le détail du calcul.

COROLLAIRE 1. — *Mêmes données que dans la proposition 10.*

(i) Si $\chi_1 \dots \chi_n = \varepsilon$, on a

$$(4.3.6) \quad |\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)|^2 = q^{n-2}.$$

(ii) Si au contraire $\chi_1 \dots \chi_n \neq \varepsilon$, on a

$$(4.3.7) \quad |\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)|^2 = q^{n-1}.$$

(iii) Dans les deux cas, on a pour la somme de Jacobi $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ la majoration en module

$$(4.3.8) \quad |\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)| \leq q^{(n-1)/2}.$$

Démonstration. — (4.3.7) résulte de (4.3.2) et de (2.3.4); (4.3.6) résulte alors de (4.3.1) et de (4.3.7); enfin, (4.3.8) est une conséquence immédiate de (4.3.6) et (4.3.7).

Appendice. — *Détermination effective des sommes de Gauss et de Jacobi.*

A.1. Commençons par les sommes de Jacobi (et limitons-nous au cas de deux caractères). Le problème est le suivant: étant donné un corps fini k , et deux caractères multiplicatifs χ et ψ de k , donnés *explicitement*, déterminer *directement* (c'est-à-dire sans remonter à la définition) et *sans ambi-*

guité la valeur de l'entier algébrique $\pi(\chi, \psi)$. Ce problème est difficile en général, mais, pour $k = \mathbf{F}_p$ et χ, ψ d'ordre peu élevé, il peut être résolu de façon élémentaire. Voyons-le sur deux exemples :

Exemple 1. — Posons $\rho = e^{2\pi i/3}$, $A = \mathbf{Z}[\rho]$; soit p un nombre premier $\equiv 1 \pmod{3}$, et soit $p = \lambda \bar{\lambda}$ sa décomposition en facteurs irréductibles dans A , λ et $\bar{\lambda}$ étant entièrement déterminés (à la conjugaison près) par la condition $\lambda \equiv \bar{\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$. Posons $k = A/\lambda A \simeq \mathbf{F}_p$, et soit $\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)_3$ le symbole de restes cubiques modulo λ dans A , défini pour tout $x \in A$ par

$$(A.1.1) \quad \left(\frac{x}{\lambda}\right)_3 = 0, \text{ si } x \equiv 0 \pmod{\lambda}; \text{ une puissance de } \rho, \text{ sinon;}$$

$$\left(\frac{x}{\lambda}\right)_3 \equiv x^{(p-1)/3} \pmod{\lambda} \text{ dans les deux cas.}$$

Ce symbole s'identifie à un caractère multiplicatif d'ordre 3 de k , qu'on notera χ . On peut alors envisager la somme de Jacobi $\pi(\chi, \chi)$, qui est un élément parfaitement déterminé de A :

PROPOSITION 11. — On a $\pi(\chi, \chi) = -\lambda$.

Démonstration. — Posons $\pi = \pi(\chi, \chi)$. (A.1.1) et la définition de χ permettent d'écrire $\pi = \sum_{x \in k} \chi(x) \chi(1-x) \equiv \sum_{x \in k} P(x) \pmod{\lambda}$, avec $P(X) = X^{(p-1)/3} (1-X)^{(p-1)/3}$; comme $\deg(P) = 2(p-1)/3 < p-1$, cette somme est nulle (dans $k = A/\lambda A$; voir chap. 3, th. 2), et π est donc divisible par λ ; mais par ailleurs $\pi \bar{\pi} = p$ (prop. 9, cor. 1): π est donc un facteur irréductible de p dans A . Au total, π est donc associé à λ dans A , et on a $\pi = \varepsilon \lambda$, ε étant une racine 6-ième de l'unité. Soient maintenant ζ une racine primitive p -ième de l'unité dans \mathbf{C} , β le caractère additif de k défini par $\beta(x) = \zeta^x$ ($x \in k$), et τ la somme de Gauss $\tau(\chi | \beta)$; on a $\tau^3 = p\pi$ (prop. 9, cor. 2), donc, puisque $p \equiv 1 \pmod{3}$, $\pi \equiv \tau^3 \equiv \left(\sum_{x \in k^*} \chi(x) \zeta^x\right)^3 \equiv \sum_{x \in k^*} \chi^3(x) \zeta^{3x} = \sum_{x \in k^*} \zeta^{3x} = -1 \pmod{3}$ (noter que $\chi^3(x) = 1$ pour tout $x \in k^*$ et que ζ^3 est une racine primitive p -ième de l'unité).

En résumé, on a donc $\pi = \varepsilon \lambda \equiv -1 \pmod{3}$, avec $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ et $\varepsilon =$ une racine 6-ième de l'unité: ceci implique $\varepsilon = -1$ (essayer les six valeurs possibles de ε), donc finalement $\pi = -\lambda$, C.Q.F.D.

Exemple 2. — Posons $i = \sqrt{-1}$, $A = \mathbf{Z}[i]$; soit p un nombre premier $\equiv 1 \pmod{4}$, et soit $p = \lambda\bar{\lambda}$ sa décomposition en facteurs irréductibles dans A , λ et $\bar{\lambda}$ étant entièrement déterminés (à la conjugaison près) par la condition $\lambda \equiv \bar{\lambda} \equiv 1 \pmod{2 + 2i}$. Posons (comme dans l'exemple 1) $k = A/\lambda A \simeq \mathbf{F}_p$, soient $\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)_2$ et $\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)_4$ les symboles de restes quadratiques et biquadratiques modulo λ dans A (définis comme le symbole de restes cubiques dans l'exemple 1), et soient φ et ψ les caractères multiplicatifs de k correspondants.

PROPOSITION 12. — On a $\pi(\varphi, \psi) = -\lambda$.

Démonstration. — Posons $\pi = \pi(\varphi, \psi)$. On vérifie immédiatement, comme pour la proposition 11, que $\pi = \varepsilon\lambda$, ε étant maintenant une racine 4-ième de l'unité. On peut déterminer ε par un argument géométrique très élégant, dû à Jacobi, et dont on verra une autre application au chapitre 9 (sect. 5.2). Soit N le nombre de solutions dans k^2 de l'équation $X^4 + Y^2 = 1$; comme $p \equiv 1 \pmod{4}$, k contient quatre racines 4-ièmes de l'unité (chap. 1, prop. 7, (ii)), et cette équation admet deux solutions (x, y) telles que $x = 0$, quatre solutions (x, y) telles que $y = 0$, les autres solutions (x, y) (telles que $xy \neq 0$) se groupant huit par huit de façon évidente; ainsi, $N \equiv 6 \pmod{8}$. D'autre part, on verra au chapitre 6 (sect. 3.3, formule (3.3.2)) que

$$(A.1.2) \quad N = p - 1 + \pi(\varphi, \psi) + \pi(\varphi, \bar{\psi}) = p - 1 + \pi + \bar{\pi};$$

posons alors $\pi = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{Z}$); (A.1.2) donne dans ces conditions $a \equiv 3 \pmod{4}$ lorsque $p \equiv 1 \pmod{8}$, et $a \equiv 1 \pmod{4}$ lorsque $p \equiv 5 \pmod{8}$; comme $p = a^2 + b^2$, on voit d'autre part que $b \equiv 0 \pmod{4}$ lorsque $p \equiv 1 \pmod{8}$, et que $b \equiv 2 \pmod{4}$ lorsque $p \equiv 5 \pmod{8}$; ainsi, dans les deux cas, $-\pi = -a - bi \equiv 1 \pmod{2 + 2i}$, donc $-\varepsilon\lambda \equiv \lambda \pmod{2 + 2i}$, donc $\varepsilon = -1$ (essayer les quatre valeurs possibles de ε), et finalement $\pi = \varepsilon\lambda = -\lambda$, C.Q.F.D.

Pour d'autres exemples analogues, voir [8], pp. 465-469.

A.2. Passons aux sommes de Gauss. Le problème est maintenant de déterminer sans ambiguïté une somme $\tau(\chi | \beta)$, χ et β étant deux caractères d'un corps fini k , l'un multiplicatif, l'autre additif, et supposés donnés explicitement. Si δ est l'ordre de χ , il est en général possible, au moins pour les

petites valeurs de δ , de déterminer explicitement $\omega(\chi | \beta) = \tau(\chi | \beta)^\delta$ à l'aide de la formule (3.3.4) (prop. 9, cor. 2). On peut alors écrire $\tau(\chi | \beta) = \varepsilon\tau_0$, ε étant une racine δ -ième de l'unité, et τ_0 étant un nombre complexe entièrement défini par les deux conditions $\tau_0^\delta = \omega(\chi | \beta)$, $0 \leq \arg(\tau_0) < 2\pi/\delta$. Le problème est donc de déterminer explicitement ε : sauf pour $\delta = 2$, ce dernier problème n'est pas résolu complètement à l'heure actuelle; c'est ce qu'illustrent bien les deux exemples suivants:

Exemple 1. — Soient p un nombre premier impair, $k = \mathbf{F}_p$, φ le caractère de Legendre de k , et β le caractère additif de k défini par $\beta(x) = e^{2\pi ix/p}$ ($x \in k$). Posons $\tau = \tau(\varphi | \beta)$; τ est un nombre complexe parfaitement défini, et la proposition 7 montre que $\tau^2 = \varphi(-1)p = (-1)^{(p-1)/2}p$, d'où

$$(A.2.1) \quad \tau = \begin{cases} \pm p^{1/2}, & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \pm ip^{1/2}, & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Problème (dit « du signe de la somme de Gauss »): dans les formules (A.2.1), quel est, en fonction de p , le « bon » signe? En fait, c'est *toujours* le signe +; mais, alors que le calcul de τ^2 est immédiat, la détermination du signe de τ est relativement difficile (Gauss lui-même mit, paraît-il, huit ans à trouver une solution...). A ce sujet (et notamment pour une démonstration), voir [8], pp. 469-478.

Exemple 2. — Reprenons les hypothèses et notations de l'exemple 1 (sect. A.1), et soit β le caractère additif de k défini par $\beta(x) = e^{2\pi ix/p}$ ($x \in k$). Posons maintenant $\tau = \tau(\chi | \beta)$ (cette somme de Gauss est dite traditionnellement « somme de Kummer »); c'est un nombre complexe parfaitement défini, et la proposition 9 (cor. 2) montre que $\tau^3 = p\pi(\chi, \chi) = -\lambda p$ (sect. A.1, prop. 11). Si alors τ_0 désigne la racine cubique de $-\lambda p$ (dans \mathbf{C}) telle que $0 \leq \arg(\tau_0) < 2\pi/3$, on a

$$(A.2.2) \quad \tau = \varepsilon\tau_0, \quad \text{avec } \varepsilon = 1, \rho \text{ ou } \rho^2.$$

Problème (dit « de la somme de Kummer »): dans la formule (A.2.2), quelle est la « bonne » valeur de ε ? Ce problème, posé dans les années 1840/1850 par Kummer (entre autres) n'est toujours pas résolu (voir [8], pp. 478-489). Cassels a formulé récemment une conjecture conforme aux valeurs numériques de τ effectivement calculées pour $p \leq 5\,000$ (et $p \equiv 1 \pmod{3}$), mais cette conjecture reste à démontrer (voir Cassels (1970)).

Le cas $\delta = 4$ est également examiné (mais non résolu !) dans [8], pp. 489-494.