

# §1. Courbes de genre 0 (\*).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

notamment que si  $V$  est une variété de dimension  $\geq 1$  et si  $\mathbf{x}$  est un *point générique* de  $V$ ,  $\mathbf{x}$  n'est pas considéré comme un *élément de  $V$* : autrement dit, on n'a pas le droit d'écrire  $\mathbf{x} \in V$ ). Pratiquement, pour la terminologie et les résultats de géométrie algébrique dont on aura effectivement besoin, le lecteur pourra se reporter au livre de Lang [12] ou à celui de Samuel [15].

Dans ce chapitre,  $k$  désigne (comme toujours) un corps fini à  $q = p^f$  éléments, et  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ .  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{P}_n$  désignent respectivement l'espace affine et l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $k$ . Enfin, si  $V$  est un ensemble algébrique défini sur  $k$ , l'ensemble des points de  $V$  rationnels sur  $k$  est désormais noté  $V_k$ .

### § 1. Courbes de genre 0 (\*).

**1.1. THÉORÈME 1.** — *Si  $V$  est une courbe projective non singulière de genre 0 définie sur  $k$ , elle est birégulièrement équivalente (sur  $k$ ) à la droite projective définie sur  $k$ .*

*Démonstration.* — D'après un théorème classique de Poincaré (voir [18], pp. 71-72),  $V$ , de genre 0, est birégulièrement équivalente sur  $k$  soit à une droite, soit à une conique (ceci, sans hypothèse sur  $k$ ; ce théorème de Poincaré peut d'ailleurs se déduire facilement du théorème de Riemann-Roch: voir par exemple [2], chap. XVI, th. 6). On peut donc se borner à démontrer le théorème 1 lorsque  $V$  est une conique définie dans le plan projectif  $\mathbf{P}_2$  par une équation homogène et de degré 2,  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ , à coefficients dans  $k$ : le théorème de Chevalley (chap. 3, th. 1, cor. 1) montre alors que cette équation admet une solution  $(a_0, a_1, a_2)$  non triviale dans  $k^3$ , donc que  $V$  admet un point  $\mathbf{a}$  rationnel sur  $k$ . Soit maintenant  $\Delta$  une droite projective du plan  $\mathbf{P}_2$ , définie sur  $k$  et ne passant pas par  $\mathbf{a}$  (si par exemple  $a_0 \neq 0$ , on peut prendre pour  $\Delta$  la droite d'équation  $X_0 = 0$ ); pour tout point  $\mathbf{y}$  de  $\Delta$ , notons  $\varphi(\mathbf{y})$  le second point d'intersection de  $V$  et de la droite joignant  $\mathbf{a}$  à  $\mathbf{y}$ ; alors l'application  $\mathbf{y} \mapsto \varphi(\mathbf{y})$  est évidemment une équivalence birégulière  $\Delta \rightarrow V$  définie sur  $k$ , et le théorème 1 est démontré.

**1.2. COROLLAIRE 1.** — *Si  $N$  désigne le nombre de points de  $V$  rationnels sur  $k$ , on a exactement  $N = q + 1$ .*

---

\*) Pour un résumé rapide et élémentaire des propriétés des courbes algébriques (genre, théorème de Riemann-Roch), voir SAMUEL (1967).

Démonstration. — Le théorème 1 permet de se limiter au cas où  $V = \Delta$  (la droite projective); mais l'ensemble  $\Delta_k$  des points de  $\Delta$  rationnels sur  $k$  comporte évidemment  $q$  éléments « à distance finie » (correspondant bijectivement aux éléments de  $k$ ), plus un élément « à l'infini » — soit au total  $q + 1$  éléments, C.Q.F.D.

## § 2. Courbes de genre 1.

Pour la géométrie des courbes de genre 1, voir [4], notamment pp. 209-233.

**2.1. THÉORÈME 2** (théorème de Schmidt). — *Si  $V$  est une courbe projective non singulière de genre 1 définie sur  $k$ ,  $V$  admet au moins un point rationnel sur  $k$ .*

Démonstration. — D'après un théorème de Châtelet (voir par exemple [4], pp. 230-233), il existe une courbe projective non singulière  $G$  (la jacobienne de  $V$ ), définie sur  $k$ , ayant un point  $\mathbf{o}$  rationnel sur  $k$ , et birégulièrement équivalente à  $V$  sur  $\bar{k}$  (ce qui permet d'identifier  $\bar{k}(G)$  à  $\bar{k}(V)$ ).  $G$  est évidemment de genre 1, comme  $V$ , et on peut la munir d'une loi de groupe rationnelle, définie sur  $k$ , notée additivement, ayant  $\mathbf{o}$  pour élément neutre, et faisant de  $G$  une variété abélienne de dimension 1 sur  $k$  ([4], pp. 210-211). De plus, l'identification  $\bar{k}(G) = \bar{k}(V)$  permet de munir  $V$  d'une structure d'espace homogène principal sur  $G$  ([4], pp. 226-227), c'est-à-dire de construire deux applications rationnelles  $\mu: V \times G \rightarrow V$ , et  $\nu: V \times V \rightarrow G$ , définies sur  $k$ , et possédant les propriétés suivantes:

- (i) quel que soit  $\mathbf{x} \in V$ , on a  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ;
- (ii) quels que soient  $\mathbf{x} \in V$  et  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ , on a  $\mu(\mu(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \mathbf{b}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ ;
- (iii) quels que soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , il existe un  $\mathbf{a} \in G$  et un seul tel que  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{y}$ , et  $\mathbf{a}$  est égal à  $\nu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

Concrètement,  $G$  opère sur  $V$  par translations:  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  est le transformé de  $\mathbf{x}$  par la translation  $\mathbf{a}$ , et  $\nu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  est la translation qui transforme  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{y}$ ; ainsi, il n'y a aucun risque de confusion à écrire  $\mathbf{x} + \mathbf{a}$  au lieu de  $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  et  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$  au lieu de  $\nu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ; on adoptera cette écriture dans le reste de la démonstration.

Convenons d'autre part, pour tout point  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$  d'un espace projectif de dimension quelconque sur  $k$ , de noter  $\mathbf{x}^{(q)}$  le point  $(x_0^q, x_1^q, \dots)$ . Il est clair que  $\mathbf{x}$  est rationnel sur  $k$  si et seulement si  $\mathbf{x}^{(q)} = \mathbf{x}$  (chap. 1, prop. 2 ou prop. 8). Il est clair également que si  $U$  est un ensemble algébrique