2.3. Un résultat général d'existence

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend $v = u$): $-\dfrac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0$, d'où:

$$u = Cx^{-1/2} \exp.\left(\frac{x^2}{4}\right); \; C = \text{constante}; \tag{2.18}$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans $\mathcal{U}_{ad}$.

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, on peut se demander *pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution.* Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. *Un résultat général d'existence*

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur $\mathbf{R}$ *uniformément réflexif*, dont la norme est notée $\|\ \|$, une fonction:

$$\left|\begin{array}{l} \varphi \to M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ X \to \mathbf{R}\,,\; M(\varphi) \geqslant c > -\infty, \end{array}\right. \tag{2.19}$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$S \text{ est fermé dans } X. \tag{2.20}$$

(en particulier S *n'est pas nécessairement convexe*).

On considère alors, pour $\xi \in X$, le problème

(2.21) $$\inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

THÉORÈME 2.1. *On peut choisir ξ dans un ensemble $\mathscr{X} \subset X$, dense dans X,* [1]) *de sorte qu'alors le problème* (2.21) *admette une solution* (i.e. il existe alors $\varphi_0 \in S$) *tel que*

$$J(\varphi_0) + \| \xi - \varphi_0 \| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \| \xi - \varphi \|].$$

Si $J = 0$, c'est un théorème dû à Edelstein [1].

2.4. *Application au problème de contrôle dans les coefficients*

Pour $\xi \in L^2(\Omega)$, on introduit (l'état $y(v)$ étant donné par (2.2)):

(2.22) $$J_\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 dx\right)^{1/2} + \varepsilon \| v - \xi \|_{L^2(\Omega)}$$
$\varepsilon > 0$.

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend:

$$X = L^2(\Omega)\ ,\ S = \mathscr{U}_{ad}\ ,$$
$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\Omega | y(v) - z_d |^2 dx\right)^{1/2}.$$

Donc: *On peut choisir ξ dans un ensemble dense de $L^2(\Omega)$ de manière qu'alors il existe $u \in \mathscr{U}_{ad}$ tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf J_\varepsilon(v)\ ,\ v \in \mathscr{U}_{ad}.$$

Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les cœfficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

---

[1]) M^lle^ F. Bidaut [1] a montré qu'il existe $\mathscr{X}$ *ensemble G_δ dense* avec la propriété.