3.3. Propriétés de comparaison

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

$$
(3.24) \quad \left| \begin{array}{l}
\dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \dfrac{p^-}{N} = f, \\[2ex]
-\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\[2ex]
y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \,, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex]
y(x, \mathrm{o}) = y_0(x) \,, p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.
\end{array} \right.
$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \dfrac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

$$
(3.25) \quad \left| \begin{array}{l}
\mathcal{U}_{ad} = \{v \,|\, v \in L^2(Q) \,,\, \alpha(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\
\alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}.
\end{array} \right.
$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]). On désigne par $\{y_i, p_i\}$ $(i = 1, 2)$ la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

$$
(3.26) \qquad f_1 \leqslant f_2 \,,\, y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}
$$

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors:

$$p_1 \leqslant p_2 \text{ (et donc } u_1 \geqslant u_2\text{) p.p. dans } Q. \tag{3.27}$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right)\right) = f_1 - f_2, \\ & -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\ & z = 0 \textit{ sur } \Sigma_- \,, q = 0 \textit{ sur } \Sigma_+, \\ & z(x, o) = y_{01}(x) - y_{02}(x) \,, q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi\psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi \, dx$. On multiplie la 1re équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q. Il vient:

$$\left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(o)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q \tag{3.29}$$

où

$$X = -\left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q . \tag{3.30}$$

Utilisant la 2e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\dfrac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(o)), \tag{3.31}$$

d'où, *comme* Λ *est un opérateur différentiel du* 1er *ordre*

$$| \Lambda q^+ |_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(o)). \tag{3.32}$$

Si l'on pose $-\dfrac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$(3.33)\quad \left| \begin{aligned} X &= - N\big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\,, (\varphi_1 - \varphi_2)^- \big)_Q \\ &= N \int_Q \big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2) \big)(\varphi_1 - \varphi_2)\, dx\, dt \\ &\varphi_1 \leqslant \varphi_2 . \end{aligned} \right.$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$(3.34)\qquad X \geqslant 0.$$

D'après (3.26), le 2e membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$\Lambda q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. *Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati*

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$(3.35)\qquad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$(3.36)\quad \left| \begin{aligned} & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\ & -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = -z_d, \\ & y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \,,\; p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ & y(x, o) = y_0(x)\,,\; p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega; \end{aligned} \right.$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$: