

3.3. Propriétés de comparaison

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ \\ - \frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant nul dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou frontière, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites non homogènes telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques} \}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés*¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, \quad y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors :

$$(3.27) \quad p_1 \leq p_2 \text{ (et donc } u_1 \geq u_2) \text{ p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$(3.28) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right) \right) &= f_1 - f_2, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z &= 0, \\ z &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad q = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ z(x, 0) &= y_{01}(x) - y_{02}(x), \quad q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \right\}$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi \psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi \, dx$. On multiplie la 1^{re} équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q . Il vient:

$$(3.29) \quad \left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(0)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

$$(3.30) \quad X = - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q.$$

Utilisant la 2^e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(3.31) \quad (\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)),$$

d'où, comme Λ est un opérateur différentiel du 1^{er} ordre

$$(3.32) \quad |\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)).$$

Si l'on pose $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^-)_Q \\
 &= N \int_Q (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leq \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geq 0.$$

D'après (3.26), le 2^e membre de (3.32) est ≤ 0 , ce qui, avec (3.34) donne:

$$\wedge q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. Cas sans contrainte — Equation intégral-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « sans contraintes », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} &= f, \\
 -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y &= -z_d, \\
 y &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 y(x, 0) &= y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$: