4. Equations d'état non linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_\Omega h(x)\,\psi^-(x,s)\,dx + \int_{\Omega\times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^-)\,dx\,dt$$
$$- \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$\int_\Omega h(x)\,\psi^-(x,s)\,dx + \int_{\Omega\times]s,T[} (\Lambda\psi^-)^2\,dx\,dt + \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0. \tag{3.54}$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^- = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre N : $P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0,T]\,,\ \iint_{\Omega\times\Omega} P_N(x,\xi,t)\,h(x)\,h(\xi)\,dx\,d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application $v \to y(v)$ est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie [1]); l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{y}{1+y} = f \,,\ x \in]0, 1[,\ t \in]0, T[, \\ \\ \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \qquad y(x, o) = y_0(x) \,,\ x \in]0, 1[$$

$$(4.3) \qquad -\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) = v(t) \,,\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0 \,,\ t \in]0, T[.$$

Les données f et y_0 et le contrôle v sont $\geqslant 0$.

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \qquad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q),\ Q = \Omega \times\ ]0, T[,\ \Omega =]0, 1[,$$

$$(4.5) \qquad y \geqslant 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1 + |\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution φ de (4.6) (4.2) (4.3) est $\geqslant 0$, donc $\varphi = y$.

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée $y(v)$, on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \qquad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + N \int_0^T v^2 \, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \qquad \inf J(v) \,,\ v \in \mathcal{U}_{ad}$$

[1]) On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

(4.9) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, contenu dans l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ p.p. sur $(0, T)$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction $v \to y(v)$ est *différentiable* de $\{L^2(0, T), v \geqslant 0\}$ dans $L^2(Q)$. Si l'on pose:

$$\bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v)\,|_{\lambda=0} \tag{4.10}$$

on vérifie que:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{\bar{y}}{1 + y} - \sigma \dfrac{\bar{y}\, y}{(1 + y)^2} = 0, \\[2ex] \bar{y}(x, \mathrm{o}) = 0, \\[2ex] - \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = v(t)\,, \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{array}\right. \tag{4.11}$$

où $y = y(u)$.

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

Remarque 4.1.

La fonction $v \to J(v)$ n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le *nombre* éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].

4.2. *Cas non différentiable*

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v \,,\ x \in]0,1[\,,\ t \in]0,T[, \tag{4.12}$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(Q), \text{ contenu dans} \\ \text{les fonctions p.p.} \geqslant 0 \text{ dans } Q. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geqslant 0$ donné; alors c étant une constante > 0,

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o},t) = -c(y-h)^+ \Big|_{x=0},\ \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = -c(y-h)^+ \Big|_{x=1}. \tag{4.14}$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$\operatorname{Inf} J(v)\,,\ v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad} \tag{4.15}$$

admet encore une solution (au moins), soit u.

Mais la fonction $\lambda \to \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \to y(v)$ de $L^2(Q) \to L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \to \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o},t) = -c\,\gamma(y(\mathrm{o},t)-h), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,t) = \quad c\,\gamma(y(1,t)-h). \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Soit $y^\gamma(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^\gamma(v) \to y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^\gamma(v)$, la fonction $v \to y^\gamma(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases,* on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt \tag{4.17}$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. Phénomènes de perturbations singulières

5.1. *Orientations*

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε, soit $y_\varepsilon(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_\varepsilon(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « *corrections* »