Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 4. Equations d'état non linéaires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^-)\,dx\,dt$$
$$- \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi^-)^2\,dx\,dt$$
$$+ \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0.$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^- = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre N : $P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0, T]\,,\ \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t)\,h(x)\,h(\xi)\,dx\,d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application $v \to y(v)$ est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie [1]; l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{y}{1+y} = f\,,\ x \in]0, 1[,\ t \in]0, T[, \\ \\ \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \qquad y(x, o) = y_0(x)\,,\ x \in]0, 1[$$

$$(4.3) \qquad -\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) = v(t)\,,\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0\,,\ t \in]0, T[.$$

Les données f et y_0 et le contrôle v sont $\geqslant 0$.

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \qquad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q),\ Q = \Omega \times]0, T[,\ \Omega =]0, 1[,$$

$$(4.5) \qquad y \geqslant 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1 + |\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution φ de (4.6) (4.2) (4.3) est $\geqslant 0$, donc $\varphi = y$.

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée $y(v)$, on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \qquad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2\, dx\, dt + N \int_0^T v^2\, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \qquad \inf J(v)\,,\ v \in \mathcal{U}_{ad}$$

---

[1]) On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

(4.9) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, contenu dans l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ p.p. sur $(0, T)$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction $v \to y(v)$ est *différentiable* de $\{L^2(0, T), v \geqslant 0\}$ dans $L^2(Q)$. Si l'on pose:

$$\bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v) \big|_{\lambda = 0} \tag{4.10}$$

on vérifie que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{\bar{y}}{1 + y} - \sigma \dfrac{\bar{y}\, y}{(1 + y)^2} = 0, \\ \bar{y}(x, o) = 0, \\ -\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(o, t) = v(t), \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $y = y(u)$.

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

Remarque 4.1.

La fonction $v \to J(v)$ n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le *nombre* éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].

4.2. *Cas non différentiable*

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v \ , \ x \in]0, 1[\ , \ t \in]0, T[, \tag{4.12}$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

(4.13) $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ = ensemble fermé convexe non vide de $L^2(Q)$, contenu dans les fonctions p.p. $\geqslant 0$ dans Q.

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geqslant 0$ donné; alors c étant une constante > 0,

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=1}. \tag{4.14}$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$\text{Inf } J(v) \ , \ v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad} \tag{4.15}$$

admet encore une solution (au moins), soit u.

Mais la fonction $\lambda \to \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \to y(v)$ de $L^2(Q) \to L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \to \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) &= -c\,\gamma(y(o, t) - h), \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) &= c\,\gamma(y(1, t) - h). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Soit $y^\gamma(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^\gamma(v) \to y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^\gamma(v)$, la fonction $v \to y^\gamma(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt \tag{4.17}$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. Phénomènes de perturbations singulières

5.1. *Orientations*

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε, soit $y_\varepsilon(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_\varepsilon(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « *corrections* »