5.2. Cas d'un système linéaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

correspondant aux *couches limites*; si $\theta_\varepsilon(v)$ désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer $y_\varepsilon(v)$ par $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$ — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de ε l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme $N \| v \|^2$ où $\| v \|$ est une norme sur l'espace des contrôles et où N est un paramètre > 0 d'autant plus petit que v est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où $N \to 0$; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

5.2. *Cas d'un système linéaire*

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière régulière Γ, on considère un système dont l'état $y = y(x, v) = y(v)$ est donné par:

$$A\, y(v) = f \text{ dans } \Omega, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \tag{5.2}$$

où A est un opérateur elliptique du 2^e^ ordre, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée conormale associée à A, et où f (resp. v) est pris dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$).

On prendra par exemple A donné par:

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + a_0\,\varphi, \tag{5.3}$$

où les a_{ij} vérifient (2.3) et où $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$y(v) \in H^1(\Omega). \tag{5.4}$$

La *fonction coût* est donnée par:

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |\, y(v) - z_d \,|^2\, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2\, d\Gamma, \tag{5.5}$$

où z_d est donné dans $L^2(\Gamma)$ et où $\varepsilon > 0$ « petit ».

Soit par ailleurs:

(5.6) $\mathscr{U}_{ad}$ = ensemble fermé convexe non vide de $L^2(\Gamma)$.

Le problème de contrôle optimal:

(5.7) $$\inf J_\varepsilon(v)\,,\ v \in \mathscr{U}_{ad},$$

admet une solution unique, soit u_ε.

Notre objet est maintenant l'étude du comportement de u_ε *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Si l'on pose:

$$y(u_\varepsilon) = y_\varepsilon$$

le contrôle optimal u_ε est caractérisé par:

(5.8) $$\int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d)(y(v) - y_\varepsilon)\, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma u_\varepsilon (v - u_\varepsilon)\, d\Gamma \geqslant 0, \ \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}.$$

On pose:

(5.9) $$(y(v) - y(\mathrm{o}))_\Gamma = \varphi\,,\ (y(u_\varepsilon) - y(\mathrm{o}))_\Gamma = \varphi_\varepsilon.$$

Alors v est donné à partir de φ de la façon suivante: on résout

(5.10) $$A\,\phi = 0 \text{ dans } \Omega,\ \ \phi\,|_\Gamma = -\,\varphi$$

et l'on pose:

(5.11) $$\mathscr{A}\,\varphi = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_\Gamma.$$

Alors:

(5.12) $$v = \mathscr{A}\,\varphi.$$

L'opérateur $\mathscr{A}$ est un *isomorphisme* de $H^s(\Gamma) \to H^{s-1}(\Gamma)$, $\forall\, s \in \mathbf{R}$ (Cf. Lions-Magenes [1], Chapitres 1 et 2).

L'opérateur inverse $\mathscr{A}^{-1}$ est donné comme suit: on résout

(5.13) $$A\,w = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial\nu} = v \text{ sur } \Gamma,$$

et alors:

(5.14) $$w\,|_\Gamma = \mathscr{A}^{-1}\,v.$$

On introduit:

(5.15) $\mathscr{K} = \mathscr{A}^{-1}(\mathscr{U}_{ad})$ = ensemble convexe fermé (non vide) de $H^1(\Gamma)$.

Avec ces notations, le problème (5.8) *équivaut* à:

(5.16)
$$\left|\begin{array}{l}\int_\Gamma (\varphi_\varepsilon-(z_d-y(\mathrm{o})))(\varphi-\varphi_\varepsilon)\,d\Gamma + \varepsilon\int_\Gamma \mathscr{A}\varphi_\varepsilon\,\mathscr{A}(\varphi-\varphi_\varepsilon)\,d\Gamma \geqslant 0,\\ \qquad\qquad \varphi_\varepsilon\in\mathscr{K},\ \forall\ \varphi\in\mathscr{K}.\end{array}\right.$$

Posons:

(5.17)
$$g = z_d - y(0).$$

Alors (5.16) équivaut à:

(5.18)
$$\varepsilon\int_\Gamma \mathscr{A}\varphi_\varepsilon\,\mathscr{A}(\varphi-\varphi_\varepsilon)\,d\Gamma + \int_\Gamma \varphi_\varepsilon(\varphi-\varphi_\varepsilon)\,d\Gamma \geqslant \int_\Gamma g(\varphi-\varphi_\varepsilon)\,d\Gamma,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{K}.$$

C'est un problème de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles (Cf. D. Huet [1], J. L. Lions [4] [5]). Le résultat est alors le suivant: on introduit

(5.19)
$$\bar{\mathscr{K}} = \text{adhérence de } \mathscr{K} \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

et soit φ_0 la solution dans $\bar{\mathscr{K}}$ de:

(5.20)
$$\int_\Gamma \varphi_0(\varphi-\varphi_0)\,d\Gamma \geqslant \int_\Gamma g(\varphi-\varphi_0)\,d\Gamma,\ \ \forall\ \varphi\in\bar{\mathscr{K}},$$

i.e.

(5.21)
$$\varphi_0 = \mathrm{Proj.}_{\bar{\mathscr{K}}}\, g = \text{projection sur } \bar{\mathscr{K}} \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ de g.}$$

On a alors:

(5.22)
$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Par conséquent:

THÉORÈME 5.1. *Lorsque* $\varepsilon\to 0$, *on a:*

(5.23)
$$y_\varepsilon\Big|_\Gamma = y(u_\varepsilon)\Big|_\Gamma \to y(\mathrm{o}) + \mathrm{Proj.}_{\bar{\mathscr{K}}}(z_d-y(\mathrm{o})) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que:

(5.24)
$$u_\varepsilon = \mathscr{A}\,\varphi_\varepsilon \to u_0 = \mathscr{A}\,\varphi_0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma).$$

En général φ_0 *n'est pas* dans $H^1(\Gamma)$ de sorte que $\mathscr{A}\,\varphi_0$ *n'est pas* dans $L^2(\Gamma)$ de sorte que le résultat (5.24) *ne peut pas en général être amélioré.*

Remarque 5.1.

Si $\varphi_0 \in H^1(\Gamma)$ (et donc à $\mathscr{K}$) alors $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ dans $H^1(\Gamma)$ et dans ce cas $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^2(\Gamma)$.

Exemple 5.1.

Prenons le cas « sans contraintes »

(5.25) $$\mathscr{U}_{ad} = L^2(\Gamma).$$

Alors $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{U}_{ad} = H^1(\Gamma)$ et $\bar{\mathscr{K}} = L^2(\Gamma)$. Donc $\varphi_0 = z_d - y(o)$ et par conséquent:

(5.26) $$y(u_\varepsilon)\Big|_\Gamma \to z_d \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Pour obtenir u_0, on résout:

(5.27) $$A\phi_0 = 0\,,\ \phi_0 = z_d \text{ sur } \Gamma$$

et alors:

(5.28) $$u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}.$$

Exemple 5.2.

Soit $\mathscr{L}$ une variété régulière de dimension $(n-2)$ contenue dans Γ. Supposons que:

(5.29) $$\mathscr{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma)\,,\ \varphi = 0 \text{ sur } \mathscr{L}\}.$$

Alors $\bar{\mathscr{K}} = L^2(\Gamma)$. On a alors:

$$\varphi_\varepsilon \to g \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Si l'on fait *l'hypothèse* que $g \in H^1(\Gamma)$, on peut utiliser Lions [4] [5] pour définir des *correcteurs* θ_ε par:

(5.30) $$\left|\begin{array}{l} \theta_\varepsilon + g \in \mathscr{K}, \\[2ex] \varepsilon \int_\Gamma \mathscr{A}\,\theta_\varepsilon\, \mathscr{A}(\varphi - \theta_\varepsilon)\, d\Gamma + \int_\Gamma \theta_\varepsilon (\varphi - \theta_\varepsilon)\, d\Gamma \geqslant \\ \qquad\qquad\qquad \int_\Gamma (\varepsilon g_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} g_{\varepsilon 2})(\varphi - \theta_\varepsilon)\, d\Gamma \\[2ex] \forall\, \varphi \text{ avec } \varphi + g \in \mathscr{K}, \end{array}\right.$$

où

$$\left| \int_\Gamma g_{\varepsilon 1}\, \varphi \, d\Gamma \right| \leqslant c \, \| \varphi \|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_\Gamma g_{\varepsilon 1}\, \varphi \, d\Gamma \right| \leqslant c \, \| \varphi \|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

(5.31) $$\varphi_\varepsilon - (g + \theta_\varepsilon) \to 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de θ_ε *est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel* ($\mathcal{A}$). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme *variante* on peut prendre:

(5.29 bis) $$\mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que $\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensemble des v tels que:

(5.32) $$y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc $\mathcal{U}_{ad}$ *est définie à partir des contraintes sur l'état,* une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de $\mathcal{L}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

5.3. *Cas d'un système non linéaire*

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

(5.33) $$\left| \begin{aligned} & -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \right.$$

où $\lambda \to \beta(\lambda)$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que $v \in L^2(\Gamma)$; le problème (5.33) admet une solution unique telle que: