

5.3. Cas d'un système non linéaire

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

$$(5.31) \quad \varphi_{\varepsilon} - (g + \theta_{\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de θ_{ε} est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel (\mathcal{A}). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme variante on peut prendre:

$$(5.29 \text{ bis}) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble des v tels que:

$$(5.32) \quad y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc \mathcal{U}_{ad} est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de \mathcal{L} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

5.3. Cas d'un système non linéaire

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que $v \in L^2(\Gamma)$; le problème (5.33) admet une solution unique telle que:

$$(5.34) \quad y \in H^1(\Omega)$$

et

$$(5.35) \quad \int_{\Omega} y \beta(y) dx < \infty.$$

La fonction coût est encore donnée par:

$$(5.36) \quad J_{\varepsilon}(v) = \int_{\Gamma} |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} v^2 d\Gamma,$$

et \mathcal{U}_{ad} est encore un ensemble fermé convexe non vide de $L^2(\Gamma)$.

On vérifie sans peine qu'il existe $u_{\varepsilon} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que:

$$(5.37) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf J_{\varepsilon}(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$$

mais la fonction $v \rightarrow J_{\varepsilon}(v)$ n'ayant pas de raison d'être convexe, il n'y a aucune raison pour que u_{ε} soit unique.

Remarque 5.3.

On pourra trouver dans Lions [2], Chapitre 3, n° 2, des exemples d'équations d'état non linéaires conduisant à des fonctions coût *convexes*.

Remarque 5.4.

Il serait intéressant de pouvoir donner des « estimations topologiques » du *nombre éventuel* de solutions du problème (5.37).

Notre objet est maintenant de faire tendre ε vers 0.

De manière formelle, lorsque $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma)$, on considère le problème de Dirichlet non homogène

$$(5.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi_0 + \beta(\phi_0) = 0, \\ \phi_0|_{\Gamma} = z_d \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ si $z_d \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Faisons l'hypothèse (de régularité sur z_d et sur β) que:

$$(5.39) \quad u_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma).$$

On a alors:

(5.40) $\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$

En effet, on note que (en posant $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée u_ε , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$ dans $H^1(\Gamma)$ faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc $J(w) \leq J(u_0) = 0$ donc $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$ donc $y(w) = \phi_0$, donc $w = u_0$, d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39), u_ε converge vers u_0 dans un espace « plus grand » que $L^2(\Gamma)$.

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver ϕ solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$